This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

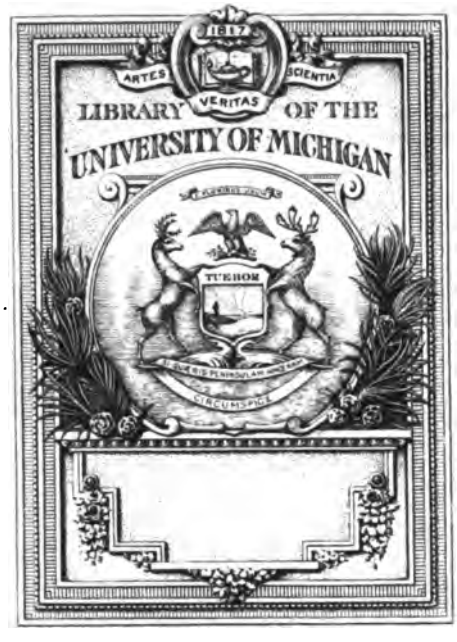
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Dr A Winckler
B. 1856

QA
211
.M23

DE

ARITHMETICIS, ET GEOMETRICIS AEQVATIONVM RESOLVTIONIBVS LIBRI DVO,

QVOS

IN TIRONVM VSVM

ELVCVBRATVS EST

P. Pál de Kerek-Jede MAKO e S. I.

VINDOBONAE,

TYPIS IOANNIS THOMAE NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CAES REG. AVLAE TYP. ET BIBL.

ANNO M DCC LXX.

Inst of Sci
Math Lib
7-24-36
32552

PRAEFATIO.

Biennium eſt, quod calculi Differentialis, atque Integralis Elementa in tironum vſum typis dederim, vbi promiſi volumen alterum, quo tam arithmeticae, quam geometricae aequationum reſolutiones continerentur, vt hac quoque parte adiuti tirones ad pulcherrimum aeque, ac vtiliſſimum matheſeos mixtae ſtudium alacrius prouolarent. Fidem datam iſthic libero; neque

10-19-39 HCL

tamen vltra gradus quarti aequationes progredior: tum quia generales altiorum reſolutiones arithmeticae hactenus inuentae non ſunt; tum quia ſatis habui viam ſternere tironibus ad aliorum tentamina eo in genere facile intelligenda.

Porro in his ipſis Reſolutionibus praetermiſi infinitam illam methodorum varietatem, qua obtundi magis, quam erudiri tirones ſolent: eas duntaxat ſelegi, quae et planiores, et magis generales viſae ſunt. Illuſtraui autem omnia exemplis, et adplicationibus quamplurimis; vnde non facultas modo inſtituendi calculi augebitur, ſed etiam totius doctrinae vtilitas maiorem in modum elucebit.

Dabam e Colleg. Reg. Theref.

LIBER PRIMVS

De arithmeticis Aequationum Reſolutionibus.

PROLEGOMENON.

1.

Prima aequationum lineamenta iam in Elementis noſtris duximus: et ſimplices quidem aequationes ſatis pertractauimus; nunc ad compoſitas gradum faciemus, et quae ad eaſdem generatim pertinent, iſthic perſequemur.

2. Aequatio *ordinari* dicitur, cum terminis omnibus ad unum membrum translatis, ita vt omnes ſimul fiant aequales nihilo, primo loco collocatur ille, in quo altiſſima incognitae occurrit potentia, redditurque idem poſitiuus, et ab omni coefficiente, vel diuiſore liber; deinde potentiae inferiores eiuſdem

incognitae aliae aliis ordine succedunt, et siqua potentia per plures quantitates cognitas multiplicata sit, ea omnia producta infra se inuicem scripta vnicum terminum conflare censentur: siquod adsit productum e meris cognitis quantitatibus, illud postremum aequationis agit terminum. Porro quantitates cognitae, per quas potentiae incognitae multiplicantur, adpellantur eorumdem terminorum *coefficientes*.

E. g. Forma aequationis rite ordinatae est $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3}$ etc. $+ t = o$, vbi quantitates p, q, r, t designant quasuis quantitates positiuas, aut negatiuas, vel quaeuis quantitatum cognitarum aggregata. Et p quidem est coefficiens termini secundi, q tertii, r quarti etc. Quare si cum hac aequatione generali conferatur sequens

$$\left.\begin{matrix} x^4 + \frac{a^2}{2b} \\ -\frac{3bc}{d} \end{matrix}\right\} x^3 \quad \left.\begin{matrix} +\frac{a^2}{4f} \\ -\frac{2a^2d}{f} \end{matrix}\right\} x^2 \quad \left.\begin{matrix} -\frac{2a^3}{b} \\ +\frac{2d^3}{k} \end{matrix}\right\} x \quad + c^3 = 0$$

erit exponens $m = 4$; $p = \frac{a^2}{2b} - \frac{3bc}{d}$ coefficiens termini secundi: $q = \frac{a^2}{4f} - \frac{2a^3d}{f}$ coefficiens termini tertii: $r = \frac{-2a^3}{b} + \frac{2d^3}{k}$ coefficiens termini quarti: $t = c^3$ terminus vltimus.

3. *Coroll.* Si desit aliqua potentia incognitae post maximam, in terminis numerandis consideratur ac si adesset, foretque coefficiens ejusdem $= o$: atque idcirco locus ejusdem saepe expleri solet stellula *.

E. g. In aequatione $x^3 * - 2x + s = o$, $-2x$ non est terminus secundus, sed tertius: secundus enim ox^2 desideratur. Quare si haec aequatio conferatur cum generali superiore, erit $m = 3$, $p = o$, $q = -2$, $t = s$.

4. Aequatio determinata dicitur esse ejus *gradus* vel *ordinis*, ad quem assurgit maximus exponens incognitae, vbi ex aequatione sublata est irrationalitas continens sub signo radicali, aut fractio continens in denominatore illam ipsam incognitam. E. g. aequatio superior $x^3 - 2x + 5 = 0$ est gradus tertii; at aequatio $x^2 + \frac{10}{x} - 27 = 0$ non est gradus secundi, cujus esse adparet, sed tertii; cum sublata fractione abeat in $x^3 - 27x + 10 = 0$. Item aequatio $2x - \sqrt{3x} - 3 = 0$ non est gradus primi, sed secundi; sublata enim irrationalitate abit in $4x^2 - 15x + 9 = 0$.

5. *Coroll.* Si in aequatione adsint termini radicales sub vinculo radicali continentes meras quantitates cognitas, quantum ad resolutionem, et incognitae valorem eliciendum, aequatio tractari solet, quasi esset eiusdem gradus, quem ostendit maximus incognitae exponens: reapse tamen aequatio eiusmodi spectata sua natura altioris est ordinis, ad quem scilicet reducitur radicali illo eliminato.

E. g. Tametsi aequatio $x^2 - 2x\sqrt{3} + 4 = 0$ eo tractari soleat modo, quo aequationes gradus secundi; re tamen ipsa est quarti gradus: facta enim transpositione fiet $x^2 + 4 = 2x\sqrt{3}$, et eleuando vtrinque ad quadratum $x^4 + 8x^2 + 16 = 12x^2$, seu $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$.

6. Aequationis indeterminatae, seu plures incognitas continentis gradus desumitur non solum ab exponentibus incognitarum, sed etiam a dimensionibus, ad quas earumdem facta assurgunt. E. g. licet in aequatione $ax + xy = b^2$ singulae incognitae vltra primum gradum non assurgant, quia tamen earumdem productum xy est duarum dimensionum, aequatio ipsa est gradus secundi. Eadem ex causa aequatio $x^2 + axy^2 - b^2 = 0$ est

gradus tertii, quia ſcilicet productum incognitarum xy^2 tres habet dimenſiones.

7. Aequatio dicitur *reducibilis*, ſi per aliquam aequationem inferioris gradus radicali carentem exacte diuidi, atque ita ad gradum inferiorem deprimi poſſit: ſin autem hoc modo deprimi nequeat, dicitur *irreducibilis*, ſeu eſſe *in propria ſede*.

E. g. Aequatio $x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$ per aequationem $x - 4 = 0$ accurate diuiſa deprimitur ad $x^2 - 6x + 10 = 0$: at haec poſterior eſt irreducibilis, cum per nullam aliam inferioris ordinis radicali carentem poſſit exacte diuidi.

8. Si in binis aequationibus eadem incognita ad plures adſurgat dimenſiones, poterit ſemper earumdem ope incognita illa eliminari, et ſic deueniri ad nouam aequationem, in qua incognita illa deſideretur. Nam

1.) Si in vtraque aequatione idem ſit exponens maximus eiuſdem incognitae x, eruatur ex vtraque valor maximae potentiae eiuſdem x, erunt ii valores inter ſe aequales, et ſic obtinebitur noua aequatio continens incognitam illam x iam minus eleuatam. E noua hac aequatione rurſus eruatur valor maximae potentiae eiuſdem incognitae x; deinde tam haec potentia, quam alterum aequationis membrum ducatur in eamdem incognitam x, vt denuo obtineatur valor potentiae priore operatione inuentae, qui aequatus alterutri e praecedentibus eiuſdem valoribus ſuppeditabit nouam aequationem, in qua incognita x minus eleuata eſt: habebuntur adeo iam duae aequationes, in quibus incognita x minus eleuata eſt, e quibus eodem pacto deuenietur ad alias binas, adhuc inferiorem eiuſdem x potentiam continentes, donec tandem deueniatur ad duas ſolam potentiam primam x continentes, cuius bini valores inter ſe aequati exhibebunt poſtremam aequationem carentem incognita illa x.

2.)

2.) Si vero in propositis binis aequationibus maximae potentiae eiusdem incognitae fuerint dissimiles, e. g. in prima fuerit x^3 potentia maxima, in secunda x^2, multiplicanda erit secunda aequatio per x, atque ita eaedem erunt in vtraque potentiae maximae: cetera deinceps peragentur, vt supra.

E. g. Dentur binae sequentes aequationes,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$$

quarum ope eliminari debeat incognita x. Cum in vtraque eadem sit potentia maxima incognitae x^3, quaeratur valor eiusdem in vtraque, erit

$$x^3 = -\frac{bx^2 - cx - d}{a},$$
$$x^3 = -\frac{fx^2 - gx - h}{e}, \text{ et hinc}$$
$$-\frac{bx^2 - cx - d}{a} = -\frac{fx^2 - gx - h}{e}$$

et multiplicando omnia per ae, ac transponendo erit

$$ebx^2 + ecx + ed = afx^2 + agx + ah,$$

vbi potentia maxima incognitae est x^2, cuius valore hinc eruto reperitur $x^2 = \frac{egx - ecx + ah - ed}{eb - af}$, et multiplicando per x prodibit $x^3 = \frac{egx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af}$, quam aequationem conferendo cum prima e superioribus habebimus $\frac{egx^2 - ecx^2 + ahx - edx}{eb - af} = -\frac{bx^2 - cx - d}{a}$; habebimus adeo iam duas aequationes, in quibus potentia maxima incognitae x est depressior. Eadem prorsus methodo ex his deueniretur ad duas, in quibus maxima eiusdem potentia esset ipsa x, ac demum ad aequationem finalem, in qua deesset x.

9. Valor quantitatis incognitae, qui positus pro ipsa incognita aequationem verificat, seu eandem rite ordinatam ad nihilum redigit, adpellatur *radix* aequationis.

E. g. Radix aequationis $x - \frac{1}{2}x - 4 = 0$ est 8, quia hoc valore pro x substituto aequatio abit in $8 - 4 - 4 = 0$. Item aequationis $x^2 - 6x + 8 = 0$ radices sunt 2 et 4: aequationis $x^2 - 3x - 10 = 0$ radices sunt 5 et -2.

10. *Coroll.* Hinc facile dignoscitur, vtrum quantitas aliqua sit radix aequationis propositae, substituendo eandem pro incognita, quam aequatio proposita continet.

11. Si quantitas incognitae substituta, ac aequationem verificans positiua sit, radix *vera* dicitur; si vero negatiua sit, radix *falsa* adpellatur.

E. g. Aequationis postremae $x^2 - 3x - 10 = 0$ radix vera est $= 5$, radix falsa $= -2$.

Scholion. Dum in problematis resolutione deuenitur ad aequationem, quae radices falsas duntaxat habet, indicio est problema non fuisse rite conceptum, sed paulo aliter fuisse proponendum. Vt si quaeras, quidnam habeat, qui lucratus aureos centum reperitur habere 60: aequatio erit $x + 100 = 60$, seu $x = -40$; vnde quaestio sic erat proponenda, quidnam ei deficiat, qui lucratus aureos centum deprehenditur habere 60. Vniuerse valor falsae radicis semper contrario sensu est accipiendus, quam in problematis conditionibus exprimendis acceptus sit, id quod ex elementis intelligi potest, et hoc loco luculento exemplo illustrabitur.

Dato interuallo duorum globorum inaequalium homogeneorum, quaeratur in recta eorundem centra iungente locus centri globi tertii inter priores ea lege interponendi, vt ab vtro-

que aequaliter attrahatur, ſuppoſita lege attractionis in ratione reciproca duplicata diſtantiarum agentis. Sit data duorum globorum diſtantia $=a$, maſſa maioris $=m$, minoris $=n$, diſtantia puncti quaeſiti a centro globi minoris $=x$, erit eiuſdem diſtantia a centro globi maioris $=a-x$: hinc quadrata diſtantiarum puncti quaeſiti a centris globorum m et n erunt x^2 et $a^2-2ax+x^2$; quare cum attractiones, quibus duo illi globi m et n extremi in medium agunt, ſint in ratione compoſita directa maſſarum, et reciproca duplicata diſtantiarum, erunt eaedem vt mx^2 $na^2-2nax+nx^2$, quae cum ex hypotheſi aequales eſſe debeant, erit $mx^2=na^2-2nax+nx^2$, ſeu $mx^2-nx^2+2nax=na^2$, id eſt $x^2+\frac{2nax}{m-n}=\frac{na^2}{m-n}$: quare quadratum complendo erit $x^2+\frac{2nax}{m-n}+\frac{n^2a^2}{(m-n)^2}=\frac{na^2}{m-n}+\frac{n^2a^2}{(m-n)^2}=\frac{a^2mn}{(m-n)^2}$, ac radicem extrahendo erit $x+\frac{na}{m-n}=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2mn}{(m-n)^2}\right)}$, ſeu $x=-\frac{an}{m-n}$ $\pm\frac{a}{m-n}\sqrt{mn}=\frac{a}{m-n}(-n\pm\sqrt{mn})$, vbi ſi $\sqrt{mn}$ accipiatur negatiue, patet radicem x fore negatiuam; ſi vero poſitiue accipiatur, ob $m>n$ erit $\sqrt{mn}>n$, et hinc $-n+\sqrt{mn}$ erit quantitas poſitiua, ac proinde etiam radix x poſitiua erit.

Iam quod ad valorem priorem negatiuum attinet, patet eum ſumi oportere non intra globos m et n, vt in problemate petebatur, ſed in eadem recta producta ex parte globi minoris n: valor enim hic idcirco prodiit negatiuus, quia in reſolutione problematis ſupponebatur locum centri quaeſitum eſſe inter globos; at ſi cogitetur locum eumdem poſſe accipi etiam in eadem recta producta ex parte globi minoris, et in hac hypotheſi reſoluatur problema, valor radicis ex eadem parte producta erit poſitiuus, ex parte vero oppoſita inter globos erit negatiuus.

Certe si ponamus $m=4n$, erit $x=\frac{1}{3}a(-1\pm 2)=\frac{1}{3}a$ vel $=-a$, qui ambo valores aeque soluent problema, prior $\frac{1}{3}a$ inter globos datos m et n, posterior $-a$ in eadem recta producta ex parte globi minoris n: vtrouis enim loco ponatur centrum globi tertii, semper duplo vicinius erit centro minoris n, quam centro maioris m, adeoque ratio composita ex directa massarum, et reciproca duplicata distantiarum vtroque in casu eadem erit, et hinc globus ille tertius a duobus datis m et n vtroque in casu aequaliter attrahetur.

12. Dum e proposita aequatione radix accurata elici nequit, vel inde fit, quod quantitas, e qua radix extrahenda esset, non sit potentia perfecta eius ordinis, cuius ordinis radix petitur; vel quod ea quantitas negatiua sit, et radix petatur ordinis paris. E priore casu nascitur discrimen radicum rationalium, et irrationalium: e posteriore discrimen radicum realium, et imaginariarum.

13. Radix aequationis ab omni vinculo seu signo radicali immunis adpellatur *rationalis*, aut *commensurabilis*, qualis est $x=5$; quae autem vinculum inuoluit radicale, dicitur *irrationalis*, aut *incommensurabilis*, qualis est $x=2\sqrt{5}$.

14. Siqua radix sub vinculo radicali habente exponentem parem contineat quantitatem negatiuam, vt si foret $x=3\sqrt{-2}$, vocatur *imaginaria*, vel *impossibilis*, cum radix exponentis paris quantitatis negatiuae sit impossibilis; reliquae radices omnes, quae huiusmodi non sunt, *reales* audiunt.

E. g. Aequationis $x^3-2x+4=0$ radix realis est -2, reliquae duae $1\pm\sqrt{-1}$ imaginariae sunt. At aequationis $x^4+x^2+6=0$ omnes radices imaginariae sunt: quouis enim valore po-

fito pro x termini omnes positiui erunt, adeoque sese mutuo destruere, seu omnes simul nihilo aequari haud poterunt; vnde adparet quantitatem, quae pro x substituta aequationem hanc verificet, esse impossibilem. Imo etiamsi ponatur $x=0$, reliquis terminis euanescentibus remanebit postremus $+6$, qui vtique nequit esse $=0$. Huiusmodi sunt omnes illae aequationes, in quibus nulla adest incognitae potentia exponentis imparis, ac termini omnes positiui sunt, quorum postremus caret incognita.

15. *Coroll.* Cum ergo problema, e cuius conditionibus aequatio nascitur, ope radicum aequationis solui debeat, si radices omnes aequationis fuerint imaginariae, argumento est problema iis terminis, quibus proponitur, inuoluere contradictionem: vt si quaeratur numerus x, cuius potentia quarta cum duplo quadrato efficiat summam negatiuam $-a$, erit $x^4+2x^2=-a$, seu $x^4+2x^2+a=0$, cuius aequationis radices omnes imaginariae sunt, vnde adparet numerum quaesitum esse impossibilem.

16. Denique radices tam irrationales, quam imaginariae adpellantur *simplices*, si constent meris terminis radicale vinculum continentibus, vt sunt $2\sqrt{-3}$, $a\sqrt{(2+\sqrt{5})}$: *mixtae* contra vocantur, si constent terminis partim rationalibus, partim radicalibus, quales sunt $a+2\sqrt{3}$, $2b-\sqrt{(3+\sqrt{-a^2})}$.

SECTIO I.

De Natura, et Proprietatibus Aequationum compositarum.

CAPVT I.

De Origine Aequationum compositarum.

17. Quemadmodum artificium radices e potentiis extrahendi eruitur ex ipsa potentiarum formatione probe perspecta: ita plane methodus resoluendi aequationes, seu earumdem radices inueniendi eruitur e compositione aequationum rite intellecta.

18. Quaeuis autem aequatio altioris ordinis potest concipi coalescere ex aequationibus inferiorum graduum inter se multiplicatis; quemadmodum potentiae altiores ex inferiorum multiplicatione oriuntur.

E. g. Assumantur pro radicibus aequationis cuiuspiam quantitates a, b, c, $-d$, $-e$ etc. nascentur totidem aequationes simplices $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x+d=0$, $x+e=0$, etc. quae inter se multiplicatae component aequationem illam, cuius radices sunt quantitates illae assumtae. Nimirum factum e duabus primis $(x-a).(x-b)$ erit aequatio $x^2-ax+ab=0$ secundi gradus habens radices a et b. Factum e tribus $(x-a).(x-b).(x-c)$ erit aequatio $x^3-\left.\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\bc\end{matrix}\right\}x-abc=0$ tertii gradus ha-

bens radices a, b, et c. Factum e quatuor $(x-a).(x-b).(x-c).(x+d)$ erit aequatio

$$x^4 \left\{\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \\ +d \end{matrix}\right\} x^3 \left\{\begin{matrix} -ad \\ -bd \\ -cd \\ +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} x^2 \left\{\begin{matrix} -abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \end{matrix}\right\} x \quad -abcd = 0$$

quarti gradus, cuius radices sunt a, b, c, et $-d$, et sic porro.

19. *Coroll.* 1. Generatim ergo e numero m aequationum primi gradus orietur aequatio gradus m: e binis aequationibus gradus m et n proueniet aequatio gradus $m+n$; prior enim earum incipiet ab x^m, posterior ab x^n, adeoque aequatio ex iisdem composita incipiet ab x^{m+n}.

20. *Coroll.* 2. Cumque potentiae incognitae ordine decrescant, et desit incognita in vltimo termino, patet numerum terminorum aequationis cuiuslibet nullo termino carentis rite exhiberi per exponentem gradus aequationis vnitate auctum. Nempe aequatio gradus tertii habet quatuor terminos, gradus quarti quinque, et sic deinceps.

21. *Coroll.* 3. Quaelibet aequatio altioris ordinis spectari potest tanquam composita multiplicatione totidem aequationum simplicium, quot ea gradus habet, quarum radices eaedem sint cum radicibus aequationis compositae: aut composita multiplicatione quotcunque aequationum, in quibus summa dimensionum aequetur gradui illius aequationis compositae.

E. g. Aequatio quarti gradus spectari potest tanquam composita e quatuor simplicibus; vel e duabus secundi gradus; vel e duabus primi, et vna secundi; vel denique ex vna primi, et altera tertii gradus.

22. *Coroll.* 4. Radices autem aequationis compositae easdem esse, quas habent aequationes componentes, perspicuum est. Siquis enim valor positus pro incognita x in vna e componentibus efficit, vt ea euanescat, seu fiat $=0$, idem positus pro x in composita efficiet pariter, vt ea fiat $=0$. Nam si vnus e factoribus sit $=0$, etiam factum, seu tota aequatio composita erit $=0$, cum quantitates quaecunque ductae in nihilum debeant esse $=0$.

23. *Coroll.* 5. Tot sunt cuiusuis aequationis compositae radices, quot vnitates habet numerus gradum aequationis determinans. Nimirum aequatio gradus secundi duas, tertii tres, quarti quatuor etc. radices habet, cum e totidem simplicibus coalescat, et in quauis simplice vna sit radix.

Scholion. Non debet tironi paradoxum videri eamdem aequationem plures radices habere posse: nam vnum idemque problema determinatum, e cuius conditionibus aequatio nascitur, plures saepe habet solutiones, quarum singulis vna aequationis radix respondere debet. E. g. Si quaeratur numerus, qui subductus a 5 det tale residuum, vt factum ex eodem residuo in ipsum illum numerum sit $=6$, erit aequatio quaestionem resoluens $x^2-5x+6=0$, cuius radices sunt 2 et 3, quarum quaelibet satisfacit problemati.

24. *Coroll.* 6. Cum radix potentiae negatiuae habens exponentem parem sit impossibilis, fieri sane potest, vt aequatio aliqua radices habeat imaginarias, tametsi in suis coefficientibus nullas inuoluat quantitates radicales. E. g. Radices aequationis $x^2+a^2=0$ sunt $+\sqrt{-a^2}$, et $-\sqrt{-a^2}$ imaginariae, id quod in iis solum obtinet, quae formantur e solis aequationibus secundi gradus, seu quarum exponens est numerus par: in his enim irrationalitas, quam radices inuoluunt, multiplicatione mutua tollitur, ita vt eadem careat aequatio composita. 25.

25. *Coroll.* 7. Si in aequatione gradus imparis primus duntaxat terminus adsit cum vltimo, ea videtur vnicam tantum habere radicem. E. g. Aequationis $ax^3 - b^4 = 0$ radix videtur esse tantum $x = \sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$. Verum exprimatur aequatio illa hac forma $x^3 - \frac{b^4}{a} = 0$, et eius radix superior hac $x - \sqrt[3]{\frac{b^4}{a}} = 0$, per quam si diuidatur aequatio ipsa, nascetur aequatio secundi gradus reliquas duas radices continens; quod vt commode fiat, ponatur $\frac{b^4}{a} = c^3$, erit $x^3 - c^3 = 0$, et $x - c = 0$, ac diuidendo aequationem primam per secundam erit quotus $x^2 + cx + c^2 = 0$, ac hinc $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}c^2}$, vbi si pro c restituatur valor $\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$, habebuntur aequationis propositae $x^3 - \frac{b^4}{a} = 0$ reliquae duae radices, nimirum $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^8}{a^2}}\right)}$.

26. Redeamus ad aequationum compositionem. Si assumtis quotcunque aequationibus simplicibus, ac in sese ductis producatur aequatio composita, ex attenta eiusdem contemplatione facile deducent tirones sequentia veluti consectaria:

1.) Terminum primum continere solam incognitam eleuatam ad eam potentiam, quam indicat numerus assumtarum aequationum simplicium componentium, absque vllo coefficiente.

2.) Terminum secundum continere eamdem incognitam vno gradu depressiorem, esseque eius coefficientem omnium radicum summam cum signo contrario acceptam.

3.) Terminum tertium continere eamdem incognitam duobus gradibus depressiorem, esseque eius coefficientem summam productorum ex omnibus radicum binariis cum signo proprio acceptam.

4.) Terminum quartum continere eamdem incognitam tribus gradibus depreſſiorem, eſſeque eius coefficientem ſummam productorum ex omnibus radicum ternariis cum ſigno contrario acceptam: et ſic porro.

5.) Terminum denique vltimum carere incognita, eſſeque productum ex omnibus radicibus cum ſuo ſigno, vel contrario, prout aequatio fuerit gradus paris, vel imparis. Nam mutato ſigno factorum numero pari non mutatur ſignum facti; mutatur vero mutato ſigno factorum numero impari: radices autem in formandis aequationibus ſimplicibus componentibus ſemper aſſumuntur cum ſigno contrario.

E. g. Sint aequationis cuiuſpiam radices a, b, c, d, e etc. erunt aequationes ſimplices eamdem componentes $x-a=0, x-b=0, x-c=0, x-d=0, x-e=0$ etc. quae ponantur eſſe numero m, aaquatio ex iiſdem compoſita erit ſequens

$$x^m \left\{\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \\ -e \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\} x^{m-1} \left\{\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +ad \\ +ae \\ +bc \\ +bd \\ +be \\ +cd \\ +ce \\ +de \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\} x^{m-2} \left\{\begin{matrix} -abc \\ -abd \\ -abe \\ -acd \\ -ace \\ -ade \\ -bcd \\ -bce \\ -bde \\ -cde \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\} x^{m-3} \left\{\begin{matrix} +abcd \\ +abce \\ +abde \\ +bcde \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\} x^{m-4} \text{ etc. } -abcde \text{ etc. } = 0.$$

e cuius attenta contemplatione euidenter adparet veritas omnium eorum, quae paulo ante dicta ſunt.

27. *Coroll.* 1. In aequatione ſuperiore, cuius omnes radices a, b, c etc. poſitiuae ſunt, ſigna terminorum + et — alter-

nant: ac viciſſim inductione conſtat aequationis, cuius ſigna hoc modo alternant, radices omnes poſitiuas eſſe.

28. *Coroll.* 2. Si radices omnes negatiuae forent, ſeu ſi aequationes ſimplices componentes eſſent $x+a=0$, $x+b=0$, $x+c=0$ etc. omnes termini aequationis compoſitae euidenter forent poſitiui, nullaque haberetur ſignorum + et — alternatio: ac viciſſim inductione conſtat aequationis, cuius omnes termini poſitiui ſunt, omnes radices eſſe negatiuas.

29. *Coroll.* 3. Eadem inductione generatim conſtat in quauis aequatione tot eſſe radices poſitiuas, quot ſunt in eiuſdem terminis a ſigno + ad —, vel a ſigno — ad + tranſitiones; ac tot eſſe radices negatiuas, quot ſunt eorumdem ſignorum continuationes.

E. g. Aequationes primi gradus duos habent terminos, quorum ſi vterque idem habeat ſignum, radix erit negatiua; ſi ſigna contraria, radix erit poſitiua, vt ſi ſit $x+p=0$, vel $-x-p=0$, ſemper erit $x=-p$. At ſi ſit $x-p=0$, vel $-x+p=0$; ſemper erit $x=p$.

In aequatione ſecundi gradus $x^2+ax+ab=0$, vbi nullae $+bx$

ſunt ſignorum permutationes, ambae radices negatiuae ſunt: at in aequatione $x^2-ax-ab=0$ vna radix poſitiua, vna negatiua $+bx$

eſt; ſiue enim terminus ſecundus poſitiuus ſit, ſiue negatiuus, ſemper habebitur vna ſignorum continuatio, et vna alternatio.

In aequatione tertii gradus poſſunt 1) omnia ſigna alternare, ac proinde omnes radices poſitiuae eſſe, vt in hac $(x-a).(x-b).(x-c)=x^3-ax^2+abx-abc=0$.
$-bx^2+acx$
$-cx^2+bcx$

2.) Possunt omnia signa continuari, ac proinde omnes radices negatiuae esse, vt in hac $(x+a).(x+b).(x+c) = x^3 + ax^2 + abx + abc = 0$.
$+ bx^2 + acx$
$+ cx^2 + bcx$

3. Possunt esse duae signorum alternationes, et vna continuatio, adeoque duae radices positiuae, et vna negatiua, vt in hac $(x-a).(x-b).(x+c) = x^3 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{matrix}\right\} x + abc = 0$, vbi cum primus, et vltimus terminus positiui sint, necessario duae sunt signorum alternationes. Si enim fuerit $a+b > c$, terminus secundus negatiuus erit; si vero fuerit $a+b < c$, terminus tertius erit negatiuus; nam $ab < (a+b)^2$; atqui in hoc casu $(a+b)^2 < (a+b)c$, seu $< ac+bc$: ergo a fortiori $ab < ac+bc$.

4.) Possunt esse duae signorum continuationes, et vna alternatio, adeoque duae radices negatiuae, et vna positiua, vt in hac $(x+a).(x+b).(x+c) = x^3 \left.\begin{matrix} +a \\ +b \\ -c \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{matrix}\right\} x - abc = 0$, vbi cum terminus primus positiuus, et vltimus negatiuus sit, necessario aderit vnica tantum signorum alternatio, et duae continuationes: si enim fuerit $a+b < c$, termini secundus, et tertius erunt negatiui; sin autem secundus positiuus fuerit posito $a+b > c$, qualiscunque sit tertius, perspicuum est vnicam fore signorum alternationem, et binas continuationes.

Eadem est ratiocinatio de aequationibus altioribus.

30. *Coroll.* 4. Quae autem circa signorum vicissitudines isthic dicta sunt, locum duntaxat habent in discernendis radicibus realibus: in imaginariis non subsistunt.

E. g. In aequatione $x^2 - 2x + 7 = 0$ e signorum alternatione videntur esse duae radices positiuae, nec tamen sunt; id quod hoc pacto deprehenditur. Multiplicetur haec aequatio per $x + 3 = 0$, fiet $x^3 + x^2 + x + 21 = 0$, in qua dispositio signorum probaret omnes radices esse negatiuas (28): ergo duae illae priores vtrique huic aequationi communes vi prioris deberent esse positiuae, vi posterioris negatiuae, quod cum absurdum sit, patet eas esse imaginarias, nempe $= 1 \pm \sqrt{-6}$.

Item aequatio $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$ spectatis signis videtur habere radicem vnam positiuam, et duas negatiuas: at si in eamdem introducatur noua radix positiua $= 2p$, multiplicando scilicet per $x - 2p = 0$, abibit in hanc $x^4 - px^3 + p^2x^2 - \left.\begin{matrix} 6p^3 \\ -q \end{matrix}\right\} x +$ $2pq = 0$, quae vi prioris aequationis deberet habere duas radices eiusdem negatiuas, et duas positiuas, vnam nempe prioris, et alteram introductam $2p$: at spectatis signis deberet habere radices omnes positiuas; quare duae illae, quae in priore videbantur esse negatiuae, in posteriore positiuae, sunt imaginariae.

31. *Coroll.* 5. Si terminus aliquis in aequatione desit, in hoc radicum criterio oritur ambiguitas, cum nesciatur, an deficiens ille terminus positiuis, an negatiuis accensendus sit. Igitur terminus ille primum habeatur pro positiuo, deinde pro negatiuo: et siquidem vtraque suppositio easdem exhibeat radices, erunt eae tales, quales a signis exhibentur; at eae, quas binae illae suppositiones contrarias esse ostendent, erunt imaginariae.

E. g. In aequatione $x^3 + \ldots - 3x + 30 = 0$ terminus secundus, qui deest, siue habeatur pro positiuo, siue pro negatiuo, semper aderunt duae signorum permutationes, et vna continuatio, adeoque duae radices positiuae sunt, et vna negatiua.

At in aequatione $x^3 + qx - r = 0$ si terminus secundus deficiens pro positiuo habeatur, vt sit $x^3 + 0x^2 + qx - r = 0$, videbitur esse vna radix positiua, et duae negatiuae: si vero terminus idem pro negatiuo habeatur, vt sit $x^3 - 0x^2 + qx - r = 0$, videbuntur omnes tres radices esse positiuae. Quare duae illae radices, quae in vna suppositione videbantur esse negatiuae, in altera positiuae, sunt imaginariae.

32. *Coroll.* 6. Si radices aequationis aliae positiuae, aliae negatiuae se mutuo destruant, earumdem summa, seu coefficiens termini secundi (26), erit $= 0$, adeoque deerit secundus terminus. Et viciſſim, si desit in aequatione terminus secundus, ea summa erit $= 0$, adeoque radices positiuae, ac negatiuae sese destruent; neque enim aliter potest deesse secundus terminus. Quare siqua aequatio careat secundo termino, euidens est radices eiusdem esse partim positiuas, partim negatiuas, et summam illarum summae harum aequari.

33. *Coroll.* 7. Eodem modo adparet deficiente termino tertio summam productorum e singulis radicum binariis, quae est coefficiens termini tertii (26), aequari nihilo: deficiente termino quarto summam productorum e singulis ternariis aequari nihilo, et sic deinceps.

34. *Coroll.* 8. Si aliquot radices aequationis fuerint aequales nihilo, deerunt in aequatione totidem termini postremi: nempe si vna radix fuerit $= 0$, deerit terminus vltimus; si duae deerunt duo postremi; si tres, deerunt tres postremi, et sic porro. Cum enim terminus vltimus sit productum omnium radicum (26), si vna radix fuerit $= 0$, etiam productum erit $= 0$, et tunc tota aequatio diuidi poterit per $x = 0$, et sic vno gradu deprimi. Et quia coefficiens termini penultimi est summa productorum omnium, quae habentur assumtis omnibus radicibus praeter

vnam (26), si duae radices fuerint $=0$, erit vnus factor assumtus $=0$, et hinc etiam terminus penultimus $=0$. Similiter quia coefficiens termini antepenultimi est summa productorum omnium, quae habentur assumtis omnibus radicibus praeter duas (26), si tres radices fuerint $=0$, erit rursum vnus factor assumtus $=0$, et hinc etiam terminus antepenultimus $=0$, atque ita de reliquis.

35. *Coroll.* 9. In eodem casu tot gradibus deprimi posse aequationem, quot termini defuerint, perspicuum est; cum enim totidem radices sint $=0$, totidem vicibus poterit aequatio diuidi per $x=0$.

36. *Coroll.* 10. Cum terminus vltimus sit productum ex omnibus aequationis radicibus (26), si aequatio ab omni fractione libera habeat radicem aliquam realem, ac rationalem, patet eam debere inueniri inter factores, seu diuisores termini vltimi integros tam cum signo $+$, quam cum signo $-$ acceptos: quare si nullus diuisor termini vltimi est radix aequationis, tuto infertur eamdem carere radice reali rationali.

37. *Coroll.* 11. Si termini aequationis nullam inuoluant quantitatem imaginariam, radices erunt vel omnes reales; vel si fuerint imaginariae, eaedem erunt numero pari, ac summa positiuarum summae negatiuarum aequalis. Imprimis enim si adest in aequatione secundus terminus habens pro coefficiente radicum summam (26), radices imaginariae binae ac binae signis contrariis se mutuo elidere debent, secus in termino secundo contra hypothesim adesset quantitas imaginaria: si vero se numero impari eliderent, iam in terminis sequentibus, quorum coefficientes ingrederentur numero impari, haberetur contra hypothesim quantitas imaginaria. Deinde si deest secundus terminus, is deesse non potest, quin summa radicum positiuarum aequetur summae negatiuarum, adeoque etiam summa imaginariarum positiuarum aeque-

tur ſummae negatiuarum. Eadem eſt ratiocinatio de radicibus realibus irrationalibus.

38. *Coroll.* 12. Quare cum radicum numerum gradus aequationis determinet (23), aequationes gradus imparis habent neceſſario ſaltem vnam radicem realem; at aequationes gradus paris habere poſſunt omnes imaginarias.

39. *Coroll.* 13. Si mutentur ſigna radicum omnium, ita vt poſitiuae abeant in negatiuas, et negatiuae in poſitiuas, in aequatione ipſa mutabuntur tantum alterna terminorum ſigna. Imprimis enim ſumma radicum omnium, ſeu coefficiens termini ſecundi manebit idem, ſed ſignum acquiret contrarium, cum mutatis omnium partium ſignis neceſſe ſit mutari ſignum totius. Deinde etiam producta ex omnibus radicum binariis, ternariis etc. ſeu coefficientes terminorum ſequentium manebunt iidem; ſed in productis ex numero pari radicum manebit ſignum priſtinum, in productis ex numero earumdem impari mutabitur: nam in quouis producto ſi mutetur ſignum duorum factorum, non mutatur ſignum facti; ſi mutetur ſignum trium factorum, mutatur ſignum facti; et generatim mutato ſigno factorum numero pari non mutatur facti ſignum; at mutato ſigno factorum numero impari, mutatur: quare ſignum termini ſecundi mutabitur, tertii manebit, quarti mutabitur, quinti manebit etc.

40. *Coroll.* 14. Viciſſim mutatis ſignis terminorum alternorum, nempe ſecundi, quarti, ſexti etc. mutantur ſigna radicum. Imprimis enim coefficiens termini ſecundi eſt ſumma radicum poſitiuarum cum ſigno —, et negatiuarum cum ſigno +: quare mutato termini ſecundi ſigno mutantur radicum ſigna. Deinde coefficientes terminorum quarti, ſexti, octaui etc. ſunt producta ex numero diſpari radicum; hinc ſi habent ſignum +, aut orti ſunt ex radicibus omnibus negatiuis, aut ex numero pari poſitiuarum,

rum, et diſpari negatiuarum; ſi vero habent ſignum —, aut orti ſunt ex radicibus omnibus poſitiuis, aut ex numero pari negatiuarum, et diſpari poſitiuarum: ergo mutatis horum terminorum ſignis mutantur radicum ſigna.

E. g. Radices aequationis $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ ſunt 2, 4, et -3: mutatis autem terminorum parium ſignis aequatio abit in $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, cuius radices ſunt eaedem, ſed mutatis ſignis, nimirum -2, -4, et 3.

Item radices aequationis $x^3 - 7x + 6 = 0$ ſunt 1, 2, et -3; at ea mutatis terminorum alternorum ſignis abit in $x^3 - 7x - 6 = 0$, cum ob deficientem ſecundum terminum $-7x$ ſit terminus tertius, non ſecundus; cuius radices ſunt -1, -2, et 3.

41. *Coroll.* 15. E contemplatione coefficientium illud etiam elucet, in quauis aequatione contineri ſolutionem alicuius problematis, e cuius conditionibus aequatio eiuſmodi enata eſt.

E. g. Aequatio $x^2 - 12x + 32 = 0$ continet ſolutionem huius problematis: Inuenire duos numeros, quorum ſumma ſit = 12, factum = 32. (26.)

Aequatio $x^3 - ax^2 - abx + abc = 0$ continet ſolutionem huius problematis: Inuenire tres quantitates, quarum ſumma ſit $= a$, factum e ſingulis binis $= -ab$, factum ex omnibus tribus $= -abc$ (26).

Aequatio $x^4 + abx^2 + a^2b^2 = 0$ continet ſolutionem huius problematis: Inuenire quatuor quantitates, quarum tam ſumma, quam ſumma productorum e ſingulis ternis ſit = 0; at ſumma productorum e ſingulis binis ſit $= ab$, factum ex omnibus quatuor $= a^2b^2$. Et ſic de aliis.

42. Si aequatio rite ordinata fractione careat, nulla eius radix realis, et rationalis eſt fractionaria proprie talis. Fractio enim proprie talis coniuncta cum quauis alia quantitate in coeffi-

ciente termini secundi nequit efficere quantitatem integram, nisi etiam illa, quacum coniungitur, sit fractio eiusdem denominatoris, vt per se patet. Sit igitur aequatio quaecunque $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ etc. $+ d = 0$ ducenda in aequationem simplicem $x + \frac{n}{r} = 0$ habentem pro radice fractionem proprie talem, demonstrandum est aequationem inde enatam

$$x^{m+1} + a\left\{+\frac{n}{r}\right\}x^m + b\left\{+\frac{an}{r}\right\}x^{m-1} \text{ etc. } + \frac{dn}{r} = 0$$

non posse carere fractione.

Ad hoc, vt coefficiens secundi termini $a + \frac{n}{r}$ sit quantitas integra, debet a eumdem habere denominatorem r, adeoque a esse aequalis valori cuipiam $\frac{p}{r}$, eritque $\frac{an}{r} = \frac{pn}{r^2}$: quare vt coefficiens termini tertii $b + \frac{an}{r} = b + \frac{pn}{r^2}$ sit quantitas integra, debet b habere pro denominatore r^2, seu esse aequalis valori cuipiam $\frac{q}{r^2}$: similiter coefficiens termini quarti deberet habere denominatorem r^3, termini quinti r^4 etc. et terminus postremus d denominatorem r^m, vnde deberet d esse aequalis valori cuipiam $\frac{s}{r^m}$, et hinc $\frac{dn}{r} = \frac{sn}{r^{m+1}}$, quae quantitas est fractio proprie talis, cum talis sit ex hypothesi $\frac{n}{r}$. Quare si vna radix esset genuina fractio, aequatio ipsa carere haud posset fractione; nam hoc ipso, quod coefficientes ita disponerentur, vt in praecedentibus euitetur fractio, in termino vltimo euitari non posset. Ergo si aequatio nullam contineat fractionem proprie talem, nulla eius radix rationalis erit fractio proprie talis.

Scholion. Quae de radicibus aequationum hactenus dicta sunt, vsui erunt in sequentibus, cum per termini vltimi diuisores tam positiue, quam negatiue sumtos tentanda erit diuisio aequationis, vt radices eiusdem rationales innotescant. Si enim aequatio proposita careat fractione proprie tali, iam patet diuisionem tentandam esse per solos diuisores integros. Si radicibus quibusdam inuentis constiterit e superioribus reliquas esse imaginarias, patet vlterioribus diuisionibus abstinendum esse. Si aequatio habeat radices tantum positiuas, superfluum erit tentare diuisiones per diuisores negatiuos, aut contra. Et sic porro de aliis.

CAPVT II.

De nonnullis Aequationum Transformationibus.

43. Vsu persaepe venit, vt aequatio ea, qua proponitur, forma admodum impeditam habeat resolutionem; fiant autem proniora omnia, si adhibita quapiam mutatione aequatio veluti praeparetur. Quare praecipuas mutationes, seu transformationes, quarum vsus frequentior est, hoc loco adferemus.

44. *Probl. Datam aequationem transformare in aliam, cuius radices a datae radicibus data quantitate differant.*

Resol. 1.) Sit aequatio quaecunque $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, cuius radices augeri debeant data quantitate a. Fiat $y = x + a$, erit $x = y - a$: si ergo in proposita aequatione pro x substituatur $y - a$, et pro x^3 et x^2 ponatur $(y-a)^3$ et $(y-a)^2$, obtinebitur noua aequatio

$$\begin{array}{l} y^3 - 3a \\ \quad -p \end{array}\left\{\begin{array}{l} y^2 \\ \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} +3a^2 \\ +2ap \\ +\ q \end{array}\right\}\begin{array}{l} -a^3 = 0 \\ y - pa^2 \\ -qa \\ -r \end{array}$$

cuius radices superant radices propositae data quantitate a.

2.) Sit propoſita eadem aequatio, ac debeant eiuſdem radices minui data quantitate a. Fiat $y=x-a$, erit $x=y+a$: ſi ergo fiant, vt ante, debitae ſubſtitutiones, exſurget aequatio

$$\begin{array}{l} y^3+3a\left\{\begin{array}{l} y^2 \\ -p \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +3a^2 \\ -2ap \\ +q \end{array}\right\} \begin{array}{l} +a^3 \\ y \\ -pa^2 \\ +qa \\ -r \end{array} \end{array} =0$$

cuius radices deficiunt a radicibus propoſitae data quantitate a.

45. *Coroll.* 1. Si aequatio propoſita, antequam reſoluatur, hoc pacto in aliam transformetur, et huius transformatae radices inueniantur, ab his demi, vel addi debet quantitas illa data, qua propoſitae aequationis radices augebantur, vel minuebantur; ita obtinebuntur radices propoſitae. Sic in caſu primo ſuperiore ab inuentis radicibus aequationis transformatae y^3 etc. demi debet quantitas a, in caſu ſecundo inuentis radicibus aequationis transformatae y^3 etc. addi debet a, vt obtineantur radices propoſitae x^3-px^2 etc.

46. *Coroll.* 2. Dum aequationis propoſitae radices data quantitate augentur, vel minuuntur, radicibus eiuſdem tam poſitiuis, quam negatiuis in caſu primo accedit quantitas aliqua poſitiua, in caſu ſecundo quantitas negatiua: quare in caſu primo ſingulas eiuſdem radices poſitiuas augeri, negatiuas minui; in caſu ſecundo ſingulas poſitiuas minui, negatiuas augeri perſpicuum eſt.

47. *Coroll.* 3. Cum radices augentur quantitate aequante aliquam radicem negatiuam, vel minuuntur quantitate aequante aliquam radicem poſitiuam, ea radix fit $=0$, et aequatio gradu vno deprimitur (34).

E. g. Si aequationis $x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$ radices 5, -2, -4, et -3 augeantur numero 3, ſeu fiat $y=x+3$, ſeu $x=y-3$, aequatio factis ſubſtitutionibus abibit in y^3-

$8y^3 - y + 8 = 0$, cuius radices sunt 8, 1, -1. Idem eodem modo patebit, si dictae aequationis radices minuantur numero 5.

48. *Coroll.* 4. In eodem casu fieri potest, vt omnes radices negatiuae abeant in positiuas, si nempe quantitas illa, qua radices augentur superet maximam radicem negatiuam; cuius quidem rei indicium erit, si in transformata aequatione signa + et — alternent (27). Item fieri potest, vt omnes radices positiuae abeant in negatiuas, si nempe quantitas illa, qua radices minuuntur, superet maximam radicem positiuam; cuius rei signum erit, si in transformata aequatione signa + vel — continuentur (29).

49. *Coroll.* 5. Porro in casu primo perspicuum est radicem maximam negatiuam fieri minimam positiuam, in casu secundo maximam positiuam fieri minimam negatiuam: item si in casu primo radices omnes negatiuae erant, in secundo omnes positiuae, in vtroque e radice minima fieri maximam.

50. *Probl. Datam aequationem transformare in aliam, cuius radices sint multiplae, vel submultiplae radicum aequationis datae.*

Resol. 1.) Sit aequatio quaecunque $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3}$ etc. $+ t = 0$, cuius radices debeant multiplicari per datam quantitatem a. Fiat $y = ax$, erit $x = \frac{y}{a}$, quo valore pro x in data aequatione substituto fiet $\frac{y^m}{a^m} + \frac{py^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{qy^{m-2}}{a^{m-2}} + \frac{ry^{m-3}}{a^{m-3}}$ etc. $+ t = 0$, seu omnia per a^m multiplicando $y^m + apy^{m-1} + a^2qy^{m-2} + a^3ry^{m-3}$ etc. $+ a^m t = 0$, quae aequatio eosdem plane habet cum proposita coefficientes $1, p, q, r$ etc. sed multiplicatos per terminos huius progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. a^m; et cuius radices omnes eaedem sunt cum illius radicibus, sed per a multiplicatis.

2.) Si eiusdem aequationis radices diuidi debeant per datam quantitatem a, seu multiplicari per $\frac{1}{a}$, in priore operatione pro a ponendo $\frac{1}{a}$, erunt omnes coefficientes multiplicati per $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ etc. $\frac{1}{a^m}$, seu diuisi per terminos correspondentes huius progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3$, etc. a^m.

51. *Coroll.* 1. Quare si singuli aequationis propositae termini multiplicentur, vel diuidantur per correspondentes terminos cuiusuis progressionis geometricae ab 1 incipientis, hoc ipso omnes eiusdem radices multiplicabuntur, vel diuidentur per secundum illius progressionis terminum.

E. g. Si termini aequationis $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cuius radices sunt -1, 1, et 3, ducantur in terminos correspondentes huius progressionis geometricae $1, 3, 9, 27$, nascetur aequatio $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$, cuius radices sunt illae eaedem, sed multiplicatae per 3, nempe -3, 3, et 9, vti patebit hos valores pro x substituenti.

At si secundae huius aequationis termini diuidantur per terminos correspondentes eiusdem progressionis, redibit aequatio $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cuius radices eaedem sunt cum illius radicibus, sed per terminum secundum progressionis 3 diuisis.

52. *Coroll.* 2. Vel me tacente intelligi potest inuentas aequationis transformatae radices diuidi, vel multiplicari oportere per illam quantitatem, per quam propositae radices multiplicatae, aut diuisae erant, vt obtineantur radices propositae. Sic postquam in exemplo superiore inuentae sunt aequationis transformatae radices -3, 3, & 9, hae per 3 diuidendae sunt, vt habeantur aequationis propositae radices -1, 1, 3.

53. *Coroll.* 3. Si in propoſita aequatione deſit aliquis terminus, non debet turbari ordo terminorum progreſſionis geometricae, ſed omittendi erunt termini reſpondentes terminis aequationis deficientibus.

E. g. Si radices aequationis $x^3 - 7x + 6 = 0$ multiplicandae forent per 2, ſcribi deberet

$$x^3 \ * \ -7x + 6 = 0$$
$$1, 2, 4, \quad 8$$

ac omitti terminus 2 reſpondens ſecundo aequationis termino deficienti; hinc obtineretur aequatio $x^3 - 28x + 48 = 0$, cuius radices 2, 4, -6 ſunt duplae radicum 1, 2, -3 aequationis propoſitae.

54. *Probl. Datam aequationem a fractionibus liberare.*

Reſol. Aequationis propoſitae termini multiplicentur per terminos correſpondentes progreſſionis geometricae ab 1 incipientis, cuius terminus ſecundus ſit productum e denominatoribus omnium fractionum: perſpicuum eſt ſingulos coefficientes hoc pacto multiplicatos poſſe accurate diuidi per ſuos denominatores, ac proinde fractiones tolli.

E.g. Sit aequatio quaecunque $x^m + \frac{px^{m-1}}{a} + \frac{qx^{m-2}}{b} + \frac{rx^{m-3}}{c}$ etc. $+ t = 0$ a fractionibus liberanda. Aſſumatur progreſſio geometrica 1, abc, $a^2b^2c^2$, $a^3b^3c^3$ etc. $a^mb^mc^m$, erit peracta multiplicatione $x^m + \frac{abcpx^{m-1}}{a} + \frac{a^2b^2c^2qx^{m-2}}{b} + \frac{a^3b^3c^3rx^{m-3}}{c}$ etc. $+ a^mb^mc^mt = 0$, ſeu $x^m + bcpx^{m-1} + a^2bc^2qx^{m-2} + a^3b^3c^2rx^{m-3}$ etc. $+ a^mb^mc^mt = 0$, cuius radices per abc diuiſae exhibebunt radices aequationis propoſitae.

Sit item aequatio $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6 = 0$ a fractionibus liberanda. Aſſumatur progreſſio geometrica 1, 4. 5, 4. 4. 5. 5, 4. 4. 4. 5. 5. 5, ſeu 1, 20, 400, 8000, erit peracta mul-

tiplicatione $x^3+\frac{3\cdot4\cdot5}{4}x^2-\frac{2\cdot4\cdot4\cdot5\cdot5}{5}x+6.4.4.4.5.5.5=0$, ſeu $x^3+15x^2-160x+48000=0$, cuius radices per 4.5, ſeu per 20 diuiſae ſuppeditabunt radices aequationis propoſitae.

55. *Coroll.* Si fractionum tollendarum denominatores habeant communes aliquos diuiſores, non erit neceſſe eos repetere, ſed ſatis eſt, ſi ſecundum progreſſionis aſſumendae terminum ingrediantur omnes non communes denominatorum factores, communibus ſemel praeterea tantum adiectis.

E. g. Cum in aequatione $x^3+\frac{3}{10}x^2-\frac{7}{6}x+8=0$ ſit $10=2.5$, et $6=2.3$, communi eorum diuiſore 2 ſemel duntaxat poſito ſatis erit in ſecundo progreſſionis aſſumendae termino ſcribere 2.5.3 loco 2.5.2.3, eritque facta multiplicatione $x^3+\frac{3\cdot2\cdot5\cdot3}{2.5}x^2-\frac{7\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3}{2.3}x+8.2.2.2.5.5.5.3.3.3=0$, ſeu $x^3+9x^2-1050x+216000=0$, cuius radices diuiſae per 2.5.3, ſeu per 30 exhibebunt radices aequationis propoſitae.

56. *Probl. E data aequatione irrationalitatem, ſeu quantitates radicales tollere.*

Reſol. 1.) Diuiſione. E. g. Sit aequatio $x^3-5x+\sqrt{2}=0$ a radicali liberanda. Fiat $y=\frac{x}{\sqrt{2}}$, erit $x=y\sqrt{2}$, et hoc valore in aequatione data pro x ſubſtituto erit $2y^3\sqrt{2}-5y\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$, ac omnia diuidendo per $\sqrt{2}$ erit $2y^3-5y+1=0$, cuius radices ſi multiplicentur per $\sqrt{2}$, obtinebuntur radices aequationis propoſitae.

2.) Multiplicando, vel diuidendo terminos aequationis per progreſſionem geometricam ab 1 incipientem, cuius terminus ſecundus ſit vna e radicalibus in aequatione occurrentibus: quo facto radicales ſaepe eliduntur, ſaepe potentiae complentur, ita vt radix extrahi poſſit. E. g.

E. g. Si termini aequationis $x^3+4x^2\sqrt{2}-6x-\frac{8}{\sqrt{2}}=0$ multiplicentur, vel diuidantur per terminos correſpondentes progreſſionis 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, fiet in caſu primo $x^3+8x^2-12x-16=0$, in ſecundo $x^3+4x^2-3x-2=0$.

Item ſi termini aequationis $x^3-ax^2\sqrt[3]{2}+abx\sqrt[3]{32}-a^3b=0$ diuidantur per terminos correſpondentes progreſſionis 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$, 2, fiet $x^3-ax^2+2abx-\frac{1}{2}a^3b=0$.

3.) Eleuatione ad eamdem potentiam, quam exponens ſigni radicalis indicat, id quod ſuccedit in his tantum caſibus, 1mo ſi aequatio duos tantum habeat terminos, vtrumque radicalem, vel vnum radicalem, alterum rationalem: 2do Si adſint duo termini radicales cum quotcunque rationalibus, modo alterutrius ſigni radicalis exponens ſit 2: 3^tio Si adſint tres radicales termini cum quotcunque rationalibus, modo omnium ſignorum radicalium exponens ſit 2: 4to Si adſint quatuor radicales termini cum exponente 2 ſine vllis aliis terminis.

Exempla.

I. Sit aequatio $a\sqrt[n]{x}-b\sqrt[n]{y}=0$, erit tranſponendo $a\sqrt[n]{x}=b\sqrt[n]{y}$, et vtrinque eleuando imprimis ad potentiam exponentis m, erit $a^mx=b^m\sqrt[n]{y^m}$, deinde vtrinque eleuando ad potentiam exponentis n, erit $a^{mn}x^n=b^{mn}y^m$, et hinc $a^{mn}x^n-b^{mn}y^m=0$.

II. Sit $a\sqrt[n]{x}-b\sqrt{y}+c=0$, exprimente termino c ſummam quotcunque terminorum rationalium, erit tranſponendo $a\sqrt[n]{x}=b\sqrt{y}-c$, et eleuando vtrinque ad potentiam exponentis m, erit numerus terminorum in ſecundo membro $=m+1$, in quibus omnes potentiae exponentis paris termini $b\sqrt{y}$ erunt a radicalibus

liberae, ac potentiae exponentis imparis continebunt quantitates rationales ductas in $\sqrt{y}$. E. g. si ponatur $m=5$, eleuando vtrinque ad potentiam quintam erit $a^5x=b^5\sqrt{y^5}-5b^4c\sqrt{y^4}+10b^3c^2\sqrt{y^3}-10b^2c^3\sqrt{y^2}+5bc^4\sqrt{y}-c^5$, seu $a^5x=b^5y^2\sqrt{y}-5b^4cy^2+10b^3c^2y\sqrt{y}-10b^2c^3y+5bc^4\sqrt{y}-c^5$. Iam transponendo omnes terminos, in quibus adest $\sqrt{y}$, erit $a^5x+5b^4cy^2+10b^2c^3y+c^5=b^5y^2\sqrt{y}+10b^3c^2y\sqrt{y}+5bc^4\sqrt{y}=(b^5y^2+10b^3c^2y+5bc^4)\sqrt{y}$. Denique vtrinque eleuando ad quadratum euanescet irrationalitas. Eadem est operandi ratio vtcunque determinetur exponens m.

III. Sit $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{u}+d=0$, relictis in primo membro binis radicalibus erit $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}=-c\sqrt{u}-d$, ac vtrinque eleuando ad quadratum erit $a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y=c^2u+2cd\sqrt{u}+d^2$. Cetera peragentur in exemplo praecedente.

IV. Sit $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}+d\sqrt{u}=0$, erit transponendo $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}=-c\sqrt{z}-d\sqrt{u}$, ac vtrinque eleuando ad quadratum erit $a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y=c^2z+2cd\sqrt{uz}+d^2u$. Cetera rursus peragentur, vt supra in exemplo secundo.

4.) In reliquis casibus recurrendum erit ad methodum generalem, quam supra adhibuimus (8). Nimirum quiuis terminus irrationalitatem inuoluens ponatur aequalis quantitati per nouam literam expressae, qua in data aequatione substituta nascetur noua aequatio continens nouas illas quantitates, et carens expressionibus radicalibus. Insuper habebuntur tot aliae aequationes, quot noui valores assumti fuerunt, in quarum singulis per eleuationem ad eas potentias, quas radicum exponentes indicant, vitabitur irrationalitas. Porro harum, et praecedentis aequationis ope eliminari poterunt noui illi valores assumti alii post alios minuendo numerum aequationum, donec vnica denique relinquatur aequatio eas solum quantitates continens, quas aequatio proposita continebat.

Exempla.

I. Sit aequatio $\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{u}-b=0$ ab irrationalitate liberanda. Fiat $\sqrt[3]{x}=p, \sqrt{y}=q, \sqrt[4]{u}=r$; valoribus hiſce ſubſtitutis erit $p+q-r-b=0$, atque habebuntur hae quatuor aequationes.

$$p+q=r+b$$
$$x=p^3$$
$$y=q^2$$
$$u=r^4$$

Iam ex prima erit $p^3=(r+b-q)^3$, ex ſecunda $p^3=x$, vnde exſurgit noua aequatio $x=(r+b-q)^3$, in qua deeſt p. Ope huius, et tertiae ſimiliter eliminari poterit q, et elici noua aequatio, in qua nec p, nec q adſit, cuius ope, et quartae eliminari poterit r, ac obtineri noua aequatio a radicalibus libera, in qua illae duntaxat adſint quantitates, quae in propoſita aderant.

II. Sit $x-\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{ad^2}=0$. Fiat $\sqrt[3]{ab^2}=y, \sqrt[3]{ad^2}=t$, habebuntur hae tres aequationes

$$x=y+t$$
$$y^3=ab^2$$
$$t^3=ad^2$$

Quare erit e prima $y=x-t$, quo valore in ſecunda ſubſtituto habebitur $x^3-3x^2t+3xt^2-t^3=ab^2$, vnde ope tertiae eliminari poterit t; nam in praecedenti aequatione pro t^3 ponendo ad^2 erit $x^3-3x^2t+3xt^2-ad^2=ab^2$ et hinc $t^2=\frac{ad^2+ab^2-x^3+3x^2t}{3x}$, ac vtrinque per t multiplicando, et loco membri primi t^3 ponendo ad^2 erit $ad^2=\frac{ad^2t+ab^2t-x^3t+3x^2t^2}{3x}$, vnde rurſus $t^2=\frac{3ad^2x-ad^2t-ab^2t+x^3t}{3x^2}$: quare aequando binos valores t^2 inuentos

obtinebitur aequatio, in qua prima duntaxat potentia occurret quantitatis t, qua reſoluta erit $t = \frac{x^4 + 2ad^2x - ab^2x}{ab^2 + ad^2 + 2x^3}$, quo valore in vna e praecedentibus e. g. in $x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - ad^2 = ab^2$ ſubſtituto obtinebitur aequatio a radicalibus libera, eaſque tantum quantitates continens, quas propoſita continebat, nempe

$$x^9 - 3ad^2x^6 + 3a^2b^4x^3 - a^3b^6 = 0.$$
$$- 3ab^2x^6 - 21a^2b^2d^2x^3 - 3a^3b^4d^2$$
$$+ 3a^2d^4x^3 - 3a^3d^4b^2$$
$$- a^3d^6$$

57. *Probl. Datam aequationem transformare in aliam, in qua terminus vltimus pauciores habeat diuiſores.*

Reſol. Sit aequatio quaecunque $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ hoc pacto transformanda. Fiat ſucceſſiue $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$ etc. ac his valoribus in aequatione ſubſtitutis obſeruetur, in quonam caſu ſumma terminorum omnium relinquat numerum pauciores factores habentem, quam habeat terminus vltimus aequationis propoſitae; deinde radix aequationis propoſitae eo numero, ex quo ſumma eiuſmodi obtenta eſt, augeatur, vel minuatur. Quodſi in caſu propoſito fiat $x = 1$, aequatio abibit in $1 - 3 - 10 + 24 = 12$: quare cum numerus 12 pauciores habeat factores, quam 24, minuantur aequationis propoſitae radices numero 1, ponendo $y = x - 1$, fiet $y^3 - 13y + 12 = 0$.

58. *Coroll.* Interdum ad finem eumdem conſequendum poterunt datae aequationis termini diuidi per terminos correſpondentes alicuius progreſſionis geometricae: quae quidem diuiſio quoties abſque fractionibus ſuccedit, toties obtinebitur intentum.

E. g. Si hoc modo transformanda eſſet aequatio $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$, poſſent eius termini exacte diuidi per terminos correſpondentes huius progreſſionis 1, 2, 4, 8, fieretque $x^3 -$

$3x^2 - x + 3 = 0$, cuius aequationis radices per 2 multiplicatae exhiberent radices propositae.

59. *Probl. E data aequatione terminum quemuis tollere.*

Resol. Sit aequatio quaecunque $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3}$ etc. $+ t = 0$; determinari debet quantitas aliqua cognita, qua eius radices ita augeri, vel minui debeant, vt terminus aequationis assignatus tollatur. Sit ea quantitas $= n$, fiatque $x = y + n$, substituendo pro potentiis radicis x potentias correspondentes quantitatis $y + n$, aequatio proposita abibit in hanc

$$y^m + nmy^{m-1} + n^2\left(\frac{m^2-m}{2}\right)y^{m-2} + n^3\left(\frac{m^3-3m^2+2m}{6}\right)y^{m-3} \text{ etc.} + t = 0$$
$$+ py^{m-1} + pn(m-1)y^{m-2} + pn^2\left(\frac{m^2-3m+2}{2}\right)y^{m-3}$$
$$+ qy^{m-2} + qn(m-2)y^{m-3}$$
$$+ ry^{m-3}$$

Si iam tolli debeat terminus secundus, erit eiusdem coefficiens $nm + p = 0$, et hinc $n = \frac{-p}{m}$. Si tertius tolli debeat, erit eiusdem coefficiens $n^2\frac{m^2-m}{2} + pn(m-1) + q = 0$, seu $n^2 + \frac{2pn}{m} + \frac{2q}{m^2-m} = 0$. Si quartus tolli debeat, erit eiusdem coefficiens $n^3\left(\frac{m^3-3m^2+2m}{6}\right) + pn^2\left(\frac{m^2-3m+2}{2}\right) + qn(m-2) + r = 0$, seu $n^3 + \frac{3pn^2}{m} + \frac{6qn}{m^2-m} + \frac{6r}{m^3-3m^2+2m} = 0$, et sic porro. Quare ad determinandam quantitatem n, si tollendus sit terminus secundus, resoluenda erit aequatio primi gradus; si tollendus sit tertius, resoluenda erit aequatio secundi gradus; si tollendus sit quartus, resoluenda erit aequatio tertii gradus, et sic deinceps. Generatim ad tollendum quemuis terminum resoluenda erit aequatio eius gradus, quem locum terminus tollendus occupat, vno inferior.

Cum ergo in omni aequatione numerus terminorum omnium designetur a numero dimensionum vnitate aucto (20, 3), perspicuum est ad tollendum terminum vltimum resoluendam esse aequationem eiusdem gradus cum proposita, imo ab eadem nihil differentem: vt enim tollatur terminus vltimus, radices aequationis augeri debent aliqua quantitate positiua, quae sit aequalis vni radici negatiuae; vel minui quantitate, quae sit aequalis vni radici positiuae (34): ergo vt quantitas illa determinetur, necesse est propositae aequationis radices inuenire, quae vtique inueniri non possunt, nisi resolutione ipsius aequationis propositae, aut alterius ab eadem nihil plane differentis.

60. *Coroll.* 1. Pro tollendo secundo aequationis termino, cuius rei vsus erit in sequentibus maximus, inuenimus $n=\frac{-p}{m}$, vnde haec regula generalis eruitur. Assumatur noua quantitas incognita, ac eidem adiungatur coefficiens termini secundi diuisus per exponentem gradus aequationis, cum signo contrario ei, quod habet ipse coefficiens: facta deinde substitutione terminus secundus euanescet.

E. g. Sit tollendus terminus secundus ex aequatione $x^3-12x^2+44x-48=0$. Diuidendo coefficientem secundi termini per exponentem 3 erit $-\frac{12}{3}=-4$: fiat ergo $x=y+4$, facta substitutione orietur aequatio $y^3-4y=0$ carens termino secundo.

61. *Coroll.* 2. Si coefficiens termini secundi nequeat exacte diuidi per exponentem gradus aequationis, fractionis euitandae causa multiplicentur prius termini aequationis per terminos correspondentes progressionis geometricae ab 1 incipientis, cuius terminus secundus sit idem ille exponens (51), atque ita diuisio exacta habebit locum.

E. g. Sit tollendus terminus ſecundus ex aequatione $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$; cum 2 nequeat per 3 accurate diuidi, multiplicentur aequationis termini per correſpondentes terminos progreſſionis 1, 3, 9, 27, abibit aequatio in $x^3 - 6x^2 + 36x - 216 = 0$, vbi iam poterit 6 diuidi per 3, et aſſumi $x = y + 2$, quo valore ſubſtituto praecedens aequatio abibit in hanc termino ſecundo carentem $y^3 + 24y - 160 = 0$.

62. *Coroll.* 3. Si termini ſecundi coefficiens partim poſitiuus, partim negatiuus fuerit, vt in aequatione $x^2 - ax - ab = 0$, $+bx$ eadem erit operandi ratio. Fiat enim $x = y + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, facta ſubſtitutione obtinebitur aequatio $y^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab = 0$ carens ſecundo termino.

63. *Coroll.* 4. Quoniam terminus ſecundus tunc ſolum deficit, dum ſumma radicum poſitiuarum aequatur ſummae negatiuarum (32), ſi radices aequationis aliqua quantitate augeantur, vel minuantur, patet ſecundum terminum denuo reſtitui.

E. g. Sit reſtituendus terminus ſecundus in aequatione $x^3 - 19x - 30 = 0$; fiat $y = x + 1$, erit $x = y - 1$, quo valore ſubſtituto mutabitur aequatio in hanc termino ſecundo praeditam $y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0$.

CAPVT III.

De Aequationibus duas, aut plures radices aequales habentibus.

64. Quodſi contemplemur aequationem transformatam, quae oritur, dum aequationis cuiuſcunque radices data quantitate minuuntur, euidenter adparebit

1.) Terminum vltimum aequationis transformatae eumdem esse cum aequatione proposita, hoc vno discrimine, quod pro incognita habeat datam illam quantitatem, qua radices aequationis propositae minuebantur.

2.) Coefficientem termini penultimi esse factum e membris termini vltimi ductis singulis in exponentes, quos data illa quantitas in iisdem habet, diuisam per datam illam quantitatem: nempe in quo membro deest n, intelligendo illud multiplicatum esse per $n^0=1$.

3.) Coefficientem termini antepenultimi esse factum e membris coefficientis termini penultimi ductis singulis in exponentes, quos data illa quantitas in iisdem habet, diuisum per duplum datae illius quantitatis.

4.) Generatim coefficientem termini cuiusuis praecedentis eadem lege oriri e membris coefficientis termini sequentis, diuidendo factum per multiplum datae illius quantitatis, cuius multiplicitatis exponens sit numerus loci, quem terminus quisque ab vltimo recedendo occupat.

E. g. Aequationis $x^4+px^3+qx^2+rx+t=0$ radices minuantur data quauis quantitate n ponendo $y=x-n$, seu $x=y+n$, erit hoc valore substituto aequatio transformata

$$\left.\begin{array}{l} y^4+4n \\ +p \end{array}\right\}y^3 \left.\begin{array}{l} +6n^2 \\ +3pn \\ +q \end{array}\right\}y^2 \left.\begin{array}{l} +4n^3 \\ +3pn^2 \\ +2qn \\ +r \end{array}\right\}y \left.\begin{array}{l} +n^4 \\ +pn^3 \\ +qn^2 \\ +rn \\ +t \end{array}\right\}=0$$

cuius terminus vltimus accurate continet aequationem propositam, at pro incognita x habet quantitatem n: coefficiens termini penultimi prodit ducendo quoduis membrum termini ultimi in exponentem sui n, et omnia diuidendo per n: coefficiens ter-

termini antepenultimi prodit ducendo quoduis membrum coefficientis termini penultimi in exponentem ſui n, et omnia diuidendo per $2n$, et ſic deinceps.

65. *Coroll.* Quare ſi aequationis cuiuſpiam radices data quantitate minuendae ſint, facile erit aequationis nouae transformatae terminos ope regularum harum inuenire.

66. Si iam binae radices aequationis cuiuſpiam aequales ſint, ſeu aequales quantitati illi n, qua minuendo radices aequatio transformata naſcitur, hoc ipſo in aequatione transformata duo valores radicis y erunt $=0$, cum ſit $y=x-n$: quare in aequatione transformata deerunt poſtremi duo termini (34). Si tres radices ſint aequales, tres valores y erunt $=0$, deeruntque tres poſtremi termini in transformata aequatione: & generatim tot termini deerunt a fine, quot fuerint radices aequales in aequatione propoſita.

67. *Coroll.* 1. Omnes ergo aequationes, quae aliquot radices aequales habent, poſſunt transformari in alias gradus inferioris, quae cum iiſdem vnam, vel plures radices communes habeant.

68. *Coroll.* 2. Et quidem ſi aequatio duas habeat aequales radices, poterit deprimi ad gradum immediate inferiorem, ita vt noua exurgens aequatio vnam habeat radicem communem cum propoſita.

e. g. Si in aequatione $x^3+px^2+qx+r=0$ duae radices aequales ſint, in transformata coefficiens termini penultimi $3n^2+2pn+q$ erit $=0$ (66); atqui ex hypotheſi $x=n$: ergo $3x^2+2px+q=0$, quae eſt aequatio ſecundi gradus, habens vnam radicem communem cum propoſita.

Item ſi in aequatione $x^4-px^3+qx^2-rx+t=0$ duae radices aequales ſint, in transformata coefficiens termini penul-

timi $4n^3 - 3pn^2 + 2qn - r$ erit $= 0$, adeoque ob $x = n$ erit $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$, quae eſt aequatio tertii gradus habens vnam radicem communem cum propoſita.

69. *Coroll.* 3. Aequationes has graduum inferiorum, quas deinceps *primo deriuatas* vocabimus, cum ipſis propoſitis aquationibus conferenti facile elucet lex deriuationis abſque ſubſidio coefficientium aequationis transformatae. Nempe ſpectando terminum aequationis propoſitae vltimum tanquam multiplicatum per $x^0 = 1$, termini ſinguli datae aequationis ducantur in exponentes, quos in iiſdem habet incognita, ac diuidantur per ipſam incognitam, hoc pacto obtinebuntur aequationes illae primo deriuatae, vti patebit ſuperiorum exemplorum contemplatione.

70. *Coroll.* 4. Si in aequatione quapiam $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$ tres radices fuerint aequales, in transformata coefficiens termini antepenultimi $6n^2 + 3pn + q$ erit $= 0$ (66), adeoque ob $x = n$ erit $6x^2 + 3px + q = 0$ habens vnam radicem communem cum propoſita. Et quia haec aequatio, quam deinceps *ſecundo deriuatam* adpellabimus, deriuatur e primo deriuata tertii gradus $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = 0$ ducendo ſingulos huius terminos in exponentes, quos in iiſdem habet incognita x, ac omnia diuidendo per $2x$, aequationes hae primo, et ſecundo deriuatae habent vnam radicem communem, adeoque aequatio primo deriuata duas habet radices communes cum propoſita.

71. *Coroll.* 5. Vniuerſe igitur quotcunque ſint radices aequales in aliqua aequatione, eae omnes demta vna inueniuntur in aequatione primo deriuata, demtis duabus in aequatione ſecundo deriuata, demtis tribus in aequatione tertio deriuata, quae ex ſecundo deriuata eadem lege deriuatur, et ſic deinceps.

72. *Coroll.* 6. Hinc facile inueniri poteſt vna e radicibus aequalibus datae cuiusuis aequationis. Si enim ex illa deriuentur

lege memorata tot aequationes, quot sunt radices aequales, et quaeratur communis diuisor aequationis vltimo deriuatae, et propositae; vel quod facilius est, vltimo et penultimo deriuatae, erit hic communis diuisor vna radicum aequalium.

73. Si aequatio quaecunque $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ duas habens radices aequales ducatur in terminos correspondentes cuiuscunque progressionis arithmeticae $a+3b$, $a+2b$, $a+b$, a, erit productum $= 0$. Si enim aequatio proposita ducatur in a, erit $ax^3 - apx^2 + aqx - ar = 0$, ac etiam eius primo deriuata $3x^2 - 2px + q$ est $= 0$ (68), quae proinde etiam ducta in bx erit $= 0$, seu $3bx^3 - 2bpx^2 + bqx = 0$; quare etiam harum aequationum summa $ax^3 + 3bx^3 - apx^2 - 2bpx^2 + aqx + bqx - ar$ est $= 0$, quae est ipsissima aequatio proposita ducta in terminos correspondentes memoratae progressionis arithmeticae.

74. *Coroll.* 1. Si ergo aequatio duas habens radices aequales ducatur hoc pacto in progressionem quamuis arithmeticam, nascitur aequatio noua habens vnam radicem communem cum proposita: quare si huius, et propositae communis diuisor inueniatur, erit is vna radicum aequalium.

75. *Coroll.* 2. Si aequatio proposita complures habeat radices aequales, toties ducenda est in terminos progressionis arithmeticae, vna vice minus, quot sunt radices aequales: cetera peragenda, vt ante.

76. *Coroll.* 3. Si aequationes hoc pacto plures deriuatae fuerint, communis diuisor facilius inuenietur inter aequationes deriuatas: & siquidem sit communis diuisor aequationis vltimo deriuatae et propositae, vel vltimo et penultimo deriuatae, is ipse erit vna radicum aequalium, cum aequatio vltimo deriuata vnicam tantum habeat radicem communem cum proposita, aut cum ante deriuatis.

77. *Coroll.* 4. Si communis ille diuisor obtineri nequeat, indicio erit radices aequales irrationales esse.

Exempla.

I. Si aequatio $x^2 - 4x + 4 = 0$ habens duas radices aequales ducatur in terminos correspondentes progressionis 0, 1, 2, erit $-4x + 8 = 0$, seu $-x + 2 = 0$, vnde $x = 2$. Si ergo diuidatur aequatio proposita per $x - 2 = 0$, erit altera radix iterum $= 2$. Eadem inueniretur radix $x = 2$, si multiplicatio fiat per quamuis aliam progressionem arithmeticam. E. g. si fiat multiplicatio per 1, 2, 3, fiet $x^2 - 8x + 12 = 0$, vnde $x^2 = 8x - 12$. Fiat rursus multiplicatio per 2, 1, 0, fiet $2x^2 - 4x = 0$, seu $x^2 = 2x$: quare $8x - 12 = 2x$, vnde $6x = 12$, et $x = 2$; id quod semel hic adnotasse sufficiat.

II. Si aequatio $x^2 - 12x + 36 = 0$ habens duas radices aequales ducatur in terminos progressionis 0, 1, 2, fiet $-12x + 72 = 0$, seu $-x + 6 = 0$, vnde $x = 6$. Si ergo aequatio data diuidatur per $x - 6 = 0$, inuenietur altera radix iterum $= 6$.

III. Si aequatio $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ habens duas radices aequales ducatur in terminos progressionis 3, 2, 1, 0, fiet $3x^3 - 10x^2 + 8x = 0$, seu $3x^2 - 10x + 8 = 0$ seu $x^2 - \frac{10x+8}{3} = 0$, quae aequatio conseruat vnam radicum aequalium propositae, et hinc $x^2 = \frac{10x-8}{3}$. Ducantur rursus termini propositae aequationis in terminos correspondentes progressionis 0, 1, 2, 3, nascetur altera aequatio $-5x^2 + 16x - 12 = 0$, seu $-x^2 + \frac{16x-12}{5} = 0$ pariter conseruans vnam radicum aequalium propositae, et hinc $x^2 = \frac{16x-12}{5}$: ergo $\frac{10x-8}{3} = \frac{16x-12}{5}$, adeoque $2x = 4$, et $x = 2$, quae est radix illa dupla aequationis propositae, per quam si bis diuidatur, obtinebitur radix eiusdem tertia inaequalis $x = 1$.

IV. Si aequatio $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$ habens duas radices aequales ducatur in terminos progreſſionis 0, 1, 2, 3, fiet $-7x^2 + 32x - 36 = 0$, vnde $x^2 = \frac{32x - 36}{7}$. Ducatur iterum eadem aequatio data in terminos progreſſionis 3, 2, 1, 0, fiet $3x^3 - 14x^2 + 16x = 0$, ſeu $3x^2 - 14x + 16 = 0$, vnde $x^2 = \frac{14x - 16}{3}$. Ergo $\frac{32x - 36}{7} = \frac{14x - 16}{3}$, ſeu $96x - 108 = 98x - 112$, et hinc $2x = 4$, et $x = 2$. Quare ſi data aequatio bis diuidatur per $x - 2$, obtinebuntur radices 2, 2, 3.

V. Si aequatio $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = 0$ habens tres radices aequales ducatur in terminos progreſſionis 0, 1, 2, 3, 4, fiet $-9x^3 + 60x^2 - 132x + 96 = -x^3 + \frac{60x^2 - 132x + 96}{9} = 0$, quae aequatio duas habet radices communes aequales cum propoſita: ſi ergo denuo ducatur in terminos progreſſionis, 0, 1, 2, 3, ac factum ducatur in 9, et diuidatur per 60, prodibit aequatio ſecundo deriuata $x^2 - \frac{264x + 288}{60} = 0$ conſeruans vnam radicum aequalium propoſitae, et hinc $x^2 = \frac{264x - 288}{60}$. Rurſus aequatio ſuperior primo deriuata ducatur in terminos progreſſionis 3, 2, 1, 0, fiet $-3x^3 + \frac{120x^2 - 132x}{9} = 0$, ſeu $-3x^2 + \frac{120x - 132}{9} = 0$, quae aequatio pariter vnam habet radicem ex aequalibus propoſitae, et hinc $x^2 = \frac{120x - 132}{27}$. Iam coaequando valores binos x^2 erit $\frac{264x - 288}{60} = \frac{120x - 132}{27}$, vnde eruitur $x = 2$ vna radix aequalium aequationis propoſitae, quare ſi aequatio propoſita ter diuidatur per $x - 2$, inuenietur radix quarta inaequalis $x = 3$.

VI. Si aequatio $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ habens tres radices aequales ducatur in terminos progreſſionis 0, 1, 2, 3, 4, fiet $-5x^3 + 18x^2 - 21x + 8 = 0$, ſeu $-x^3 + \frac{18x^2 - 21x + 8}{5} = 0$, quae aequatio primo deriuata continet duas radices aequales propoſitae: quare ſi haec iterum ducatur in terminos progreſſionis 0, 1, 2, 3, naſcetur aequatio ſecundo deriuata $x^2 - \frac{42x + 24}{18} = 0$ conſeruans vnam radicum aequalium, et hinc $x^2 = \frac{42x - 24}{18}$. Rurſus aequationem primo deriuatam ducendo in terminos progreſſionis 3, 2, 1, 0, fiet aequatio ſecundo deriuata $-3x^3 + \frac{36x^2 - 21x}{5} = 0$, ſeu $-x^2 + \frac{12x - 7}{5} = 0$ pariter conſeruans vnam radicum aequalium, et hinc $x^2 = \frac{12x - 7}{5}$. Quare coaequando binos valores x^2 erit $\frac{42x - 24}{18} = \frac{12x - 7}{5}$, vnde eruitur $x = 1$. Si ergo aequatio propoſita ter diuidatur per $x - 1$, obtinebitur radix quarta inaequalis $x = 2$.

VII. Si aequatio $x^4 - 54x^2 + 216x - 243 = 0$ habens tres radices aequales ducatur in terminos progreſſionis 0, 1, 2, 3, 4, cuius ſecundus terminus omitti debet ob deficientem ſecundum aequationis propoſitae terminum, naſcetur aequatio primo deriuata $-108x^2 + 648x - 972 = 0$, ſeu $-x^2 + \frac{648x - 972}{108} = 0$ conſeruans duas radices aequales propoſitae aequationis, qua rurſus ducta in terminos progreſſionis 0, 1, 2, naſcetur aequatio ſecundo deriuata $\frac{648x - 1944}{108} = 0$ habens vnam radicum aequalium propoſitae, quam patet eſſe $x = 3$. Si ergo aequatio propoſita ter diuidatur per $x - 3$, inuenietur radix quarta inaequalis $x = 9$.

Scholion. In exemplo vltimo ob deficientem terminum ſecundum aequatio ſecundo deriuata prouenit vnius duntaxat dimenſionis, quae cum vnicam habeat radicem $x=3$, patet illico eam eſſe radicem illam triplicem aequationis propoſitae. In exemplis tertio, quarto, quinto, et ſexto obtenta eſt aequatio vnius dimenſionis ope duarum deriuatarum inter ſe collatarum. At ſi gradus aequationis plus quam vnitate ſuperet numerum radicum aequalium, hoc pacto ad aequationem vnius dimenſionis deueniri haud poterit, ſed tunc quaerendus erit communis diuiſor aequationum duarum vltimo deriuatarum. E. g. Si aequatio $x^4-7x^3+17x^2-17x+6=0$ habeat duas radices aequales, ducendo eius terminos in correſpondentes terminos progreſſionum 0, 1, 2, 3, 4 et 4, 3, 2, 1, 0, naſcentur duae aequationes primo deriuatae $-7x^3+34x^2-51x+24=0$, et $4x^3+21x^2+34x-17=0$, e quibus vlteriores eadem lege deriuari nequeunt, cum quaeuis earum vnam tantum contineat radicum aequalium propoſitae. Quare quaerendus erit harum duarum deriuatarum communis diuiſor $x-1$, eritque $x=1$ radix illa duplex aequationis propoſitae, quae ſi per $x-1$ bis diuidatur, relinquetur aequatio ſecundi gradus $x^2-5x+6=0$, cuius radices ſunt 2 et 3: adeoque propoſitae aequationis radices erunt 1, 1, 2, 3.

CAPVT IV.

De Limitibus, intra quos Radices aequationum continentur.

78. Cum radices aequationum methodis infra explicandis indagantur, magna ſaepe leuamur moleſtia, ſi ante eam indagationem certos conſtituamus limites, intra quos radices propoſitae aequationis includuntur. Quare viſum eſt hoc loco proponere rationes aliquot eiuſmodi limites inueſtigandi.

79. *Probl. Inueſtigare limites radicum augendo eaſdem, vel minuendo quantitate datâ.*

Reſõl. Sit aequatio quaecunque $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, augeantur, vel minuantur eiuſdem radices quantitate n, e.g. fiat $y = x - n$, ſeu $x = y + n$, valore hoc ſubſtituto obtinebitur aequatio transformata

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + 3n \\ -p \end{array}\right\} y^2 \quad \left.\begin{array}{l} +3n^2 \\ -2pn \\ -q \end{array}\right\} y \quad \begin{array}{l} +n^3 = 0. \\ -pn^2 \\ -qn \\ -r \end{array}$$

Si iam in aequatione hac transformata pro quantitate n diuerſi valores ſucceſſiue ſubſtituantur, ac in aequatione hac noua accedat ſignorum alternatio, vel noua continuatio, vna ex eiuſdem radicibus mutabitur in caſu primo e negatiua in poſitiuam, in caſu ſecundo e poſitiua in negatiuam (29): quare inter binos eiuſmodi valores n, inter quorum ſubſtitutiones eiuſmodi mutatio facta eſt, debet conſiſtere aliqua radix in caſu priore negatiua, in poſteriore poſitiua, quae ſcilicet vno valore n ſubſtituto eliſa non fuit, ac ſubſtituto altero eliditur, et ſignum mutat.

E. g. Sit aequatio $x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$ duas habens ſignorum alternationes, et vnam continuationem. Si fiat $y = x + 2$, ſeu $x = y - 2$, facta ſubſtitutione aequatio transformata $y^3 - 4y^2 + 3y + 8 = 0$ pariter duas habebit ſignorum alternationes, ac vnam continuationem. At ſi fiat $y = x + 4$, ſeu $x = y - 4$, facta ſubſtitutione aequatio transformata $y^3 - 10y^2 + 31y - 22 = 0$ tres habebit ſignorum alternationes, adeoque radix negatiua migrauit in poſitiuam, quae proinde, ſiquidem realis eſt, contineri debet inter -2 et -4, cum augendo radices numero 2 eliſa non fuerit; at augendo numero 4 eliſa ſit, ſignumque mutauerit. Et ſane ſubſtitutione patebit eam radicem eſſe -3.

80. *Coroll.*

80. *Coroll.* Si quantitas, qua radices aequationis datae augentur, efficiat omnium ſignorum alternationem, efficiet omnes radices poſitiuas, adeoque ſuperabit maximam radicem negatiuam, eritque limes radicum negatiuarum. Si vero quantitas, qua radices minuuntur, efficiat omnium ſignorum continuationem, efficiet omnes radices negatiuas, adeoque ſuperabit maximam radicem poſitiuam, eritque limes radicum poſitiuarum.

E. g. Si aequationis $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ radices augeantur numero 4 ponendo $y = x + 4$, ſeu $x = y - 4$, in aequatione transformata omnia ſigna alternabuntur: at ſi minuantur eodem numero 4 ponendo $y = x - 4$, ſeu $x = y + 4$, omnia ſigna continuabuntur. Quare numerus 4 ſuperat maximam radicem poſitiuam, et -4 maximam negatiuam. Et ſane radices propoſitae aequationis ſunt $-1, 2, -3$ vti patebit ſubſtituenti.

81. *Probl. Inuenire limites radicum aequationis ſola terminorum tranſpoſitione.*

Reſol. Termini negatiui aequationis tranſpoſitione reddantur poſitiui. Si deinde membrum vnum conſtet termino vnico incognitam continente, alterum pluribus, quorum aliquis contineat potentiam incognitae ſuperiorem ea, quae habetur in altero membro, aliquis vero inferiorem, cenſendo inter potentias etiam $x^0 = 1$, ſeu terminum, in quo x deeſt, omittantur in membro plures terminos continente reliqui omnes praeter vnicum primo quidem continentem incognitae potentiam altiorem, tum inferiorem; erit hoc ipſo id membrum altero minus, ac diuidendo per incognitam, quoties licebit, manebit in primo caſu quaedam potentia incognitae minor quantitate cognita, in ſecundo quaedam quantitas cognita minor quadam potentia incognitae: vnde limes vterque, tam excedens ſcilicet, quam deficiens facile eruetur.

E. g. Quaerantur limites radicum aequationis $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$: erit transponendo $x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$. Iam cum in secundo membro vnicus sit terminus incognitam continens, et in eo inferior sit potentia incognitae, quam in primis binis terminis alterius membri, et maior, quam in binis postremis, omissis ceteris terminis erit $x^5 < 10x^3$, seu $x^2 < 10$, et $x < \sqrt{10}$, seu $x < 3,2$: latet nimirum $\sqrt{10}$ inter $\sqrt{3,1}$ et $\sqrt{3,2}$, hinc secundum assumimus, vt certum sit esse $x < \sqrt{3,2}$, quod etiam in sequentibus semper obseruabimus.

Porro retento solo termino secundo membri primi erit $2x^4 < 10x^3$, seu $x < 5$, qui limes est priore remotior. Retento solo tertio erit $2x^2 < 10x^3$, seu $2 < 10x$, vnde $\frac{1}{5} < x$, seu $x > \frac{1}{5}$, vel $x > 0,2$. Retento solo quarto erit $4 < 10x^3$, seu $x^3 > \frac{4}{10}$, et hinc $x > \sqrt[3]{0,4}$, seu $x > 0,7$, qui limes priore est propior. Includuntur adeo radices positiuae aequationis propositae intra limites 0,7 et 3,2.

82. *Coroll.* 1. Si aequatio esset huiusmodi $x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 4 = 0$, et quaererentur limites radicum negatiuarum, mutanda forent signa terminorum alternorum, ac rediret aequatio, cuius radices positiuae continebantur intra limites 0,7 et 3,2: quare radices negatiuae aequationis propositae continentur intra $-0,7$ et $-3,2$, id quod semper fieri debet, si radicum negatiuarum limites quaerantur.

83. *Coroll.* 2. Si facta transpositione in altero membro habeatur vnicus terminus, isque continens minimam incognitae potentiam, vel maximam omnium earum, quae adsunt in altero, semper inuenietur in casu primo limes deficiens, in secundo limes excedens radices positiuas.

E. g. Si quaerantur limites radicum aequationis $x^5+3x^3+2x^2-64=0$, erit transponendo $x^5+3x^3+2x^2=64$, vnde $2x^2<64$, et $x^2<32$, adeoque $x<\sqrt{32}$, seu $x<5,7$. Retento autem solo secundo membri primi termino erit $3x^3<64$, seu $x^3<21,4$, adeoque $x<\sqrt[3]{21,4}$, seu $x<2,8$. Retento solo primo termino erit $x^5<64$, vnde $x<\sqrt[5]{64}$, seu $x<2,3$, qui limes est omnium proximus, cum sit omnium minimus.

Sin autem aequatio proposita sit $x^5-x^4-2x^3-243=0$, erit $x^5=x^4+2x^3+243$, vnde $x^5>x^4$, seu $x>1$. Item $x^5>2x^3$, seu $x^2>2$, et $x>\sqrt{2}$, seu $x>1,4$. Item $x^5>243$, adeoque $x>\sqrt[5]{243}$, seu $x>3$, qui limes est proximus, cum sit omnium maximus.

84. *Coroll.* 3. Si inuento limite excedente, termini membri continentis potentias incognitae superiores diuidantur per incognitam x, ac terminus in altero membro incognita carens diuidatur per inuentum limitem, membrum incognitam continens iam fiet altero minus, et insuper habebit terminum cognitum, quo vtrinque ablato, ac repetita diuisione deueniri interdum poterit ad vnicum terminum continentem incognitam x, et cognito maiorem, atque ita etiam limes deficiens erui.

E. g. In aequatione $x^5+3x^3+2x^2-64=0$ limitem excedentem supra inuenimus 2, 3: si iam facta transpositione membrum aequationis primum diuidatur per x^2, secundum per $(2,3)^2$, erit $x^3+3x+2>12$, seu $x^3+3x>10$. Rursus diuidendo primum membrum per x, secundum per 2, 3, erit $x^2+3>4,3$, seu $x^2>1,3$, vnde $x>\sqrt{1,3}$, seu $x>1,1$. Versantur adeo valores radicis positiuae inter 1, 1 et 2, 3.

Ex his facile adparet methodus inueniendi limites in aequationibus ſecundi, tertii, et quarti gradus, ſicuti videre licet in exemplis ſequentibus.

Exempla.

I. Sit $x^2+px-q=0$, erit $x^2+px=q$, vnde $px<q$, et $x<\frac{q}{p}$. Item $q>x^2$, et $\sqrt{q}>x$, adeoque $x\sqrt{q}>x^2$, et $x\sqrt{q}+px>x^2+px$, ſeu $x\sqrt{q}+px>q$, et hinc $x>\frac{q}{p+\sqrt{q}}$. Radix ergo vna propoſitae aequationis continetur intra limites $\frac{q}{p}$ et $\frac{q}{p+\sqrt{q}}$ E. g. Si ſit $x^2+4x-12=0$, erit $\frac{q}{p}=\frac{12}{4}=3$, et $\frac{q}{p+\sqrt{q}}=\frac{12}{4+3}$ proxime, $=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$: quare radix vna latet inter 3 et $1\frac{5}{7}$; et certe radix vna eſt $=2$, qua inuenta facile inuenitur altera $=-6$, diuidendo aequationem per $x-2$.

II. Sit $x^2-px+q=0$, erit $x^2+q=px$, vnde $x^2<px$, et $x<p$. Item $px>q$, et $x>\frac{q}{p}$: latet adeo vna radicum inter p et $\frac{q}{p}$. E. g. Si ſit $x^2-3x+3=0$, erit $p=3$, $\frac{q}{p}=\frac{3}{3}=1$; igitur latet vna radix inter 3 et 1.

III. Sit $x^2-px-q=0$, erit $x^2=px+q$, vnde $x^2>q$, et $x>\sqrt{q}$, adeoque $x\sqrt{q}>q$; atqui fuit $x^2=px+q$: ergo pro q ponendo $x\sqrt{q}$ erit $x^2<px+x\sqrt{q}$, ſeu $x<p+\sqrt{q}$. Item $x^2>px$, vnde $x>p$, et $px>p^2$; atqui fuit $x^2=px+q$: ergo pro px ponendo p^2 erit $x^2>p^2+q$, et $x>\sqrt{(p^2+q)}$: latet ergo vna radicum inter $p+\sqrt{q}$ et $\sqrt{(p^2+q)}$. E. g. ſit $x^2-3x-4=0$, erit proxime $\sqrt{(p^2+q)}=\sqrt{13}=3$, et $p+\sqrt{q}=3+2=5$; quare radix vna continetur inter 3 et 5.

IV. Sit $x^3 - qx + r = 0$, erit $x^3 = qx - r$, vnde $x^3 < qx$, et $x < \sqrt{q}$. Item $x^3 + r = qx$, hinc $qx > r$, et $x > \frac{r}{q}$: radix ergo vna continetur intra limites $\sqrt{q}$ et $\frac{r}{q}$. E. g. si sit $x^3 - 19x + 30 = 0$, erit $\sqrt{q} = \sqrt{19} = 4$ quam proxime, et $\frac{r}{q} = \frac{30}{19} = 1\frac{1}{2}$ circiter. Hinc vna radicum latet inter 4 et $1\frac{1}{2}$.

V. Sit $x^3 - px - q = 0$, erit $x^3 - px = q$, hinc $x^2 - p < q$, seu addendo vtrinque p erit $x^2 < p + q$, adeoque $x < \sqrt{(p+q)}$. Erit item $x^3 > q$, et hinc $x > \sqrt[3]{q}$: quare radicum vna versatur inter limites $\sqrt{(p+q)}$ et $\sqrt[3]{q}$. E. g. si sit $x^3 - 12x - 12 = 0$, erit $\sqrt{(p+q)} = \sqrt{24} = 4$ proxime, et $\sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{12} = 2$ proxime: quare radicum vna latet inter 4 et 2.

VI. Sit $x^3 + qx - r = 0$, erit $x^3 + qx = r$, vnde $qx < r$, adeoque $x < \frac{r}{q}$. Item erit $x^3 < r$, et $x < \sqrt[3]{r}$, vnde etiam $x^2 < \sqrt[3]{r^2}$, et $x^3 < x\sqrt[3]{r^2}$, quo valore pro x^3 in aequatione data substituto erit $x\sqrt[3]{r^2} + qx > r$, adeoque $x > \frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$.

VII. Sit $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, erit $x^4 - px^2 = qx + r$, et hinc $x^4 > px^2$, adeoque $x^2 > p$, et $x > \sqrt{p}$. Item erit $x^4 - px^2 - qx = r$, quare membrum primum diuidendo per x erit $x^3 - px - q < r$, seu $x^3 - px < r + q$, et a fortiori $x^2 - p < r + q$, adeoque $x^2 < r + q + p$, et hinc $x < \sqrt{(r+q+p)}$.

85. *Probl. Inuestigare eosdem limites ope aequationum e data deriuatarum.*

Resol. E proposita aequatione deriuetur alia primo deriuata (69), ex hac rursus altera secundo deriuata (70), continuenturque eadem lege deriuationes, donec perueniatur ad ae-

quationem ſimplicem vltimo deriuatam: aequationes hoc pacto deriuatae exhibebunt limites, intra quos continentur aequationis propoſitae radices tam poſitiuae, quam negatiuae. Numerus enim poſitiuus, qui loco incognitae poſitus in data, et in deriuatis aequationibus omnibus efficit ſummam vbique poſitiuam, maior erit quauis radice poſitiua aequationis datae, adeoque erit limes radicum poſitiuarum: numerus autem negatiuus, qui loco incognitae poſitus efficit ſummam poſitiuam in aequationibus paris dimenſionis, negatiuam in aequationibus dimenſionis imparis, maior erit quauis radice negatiua, erit proinde limes radicum negatiuarum.

Demonſtr. Aequatio propoſita eſt terminus vltimus, et aequationes deriuatae ſunt coefficientes aequationis transformatae, in quam abit data aequatio, ſi eius radices aliqua quantitate indeterminata n minuantur (64), hoc vno diſcrimine, quod in his incognita idem valeat, ac in iis indeterminata n: ſi ergo in his pro incognita aſſumatur eiusmodi numerus poſitiuus, vt omnes aequationes efficiant ſummam poſitiuam, in transformata illa omnes termini erunt poſitiui, adeoque omnes radices negatiuae (28); hinc quantitas illa indeterminata n, quae hic pro incognita ponitur, eiusmodi eſt, vt ſi radices eadem minuantur, efficiat omnes negatiuas, adeoque vt ſuperet quamuis radicem poſitiuam. In caſu ſecundo ob ſignorum alternationem in aequatione illa transformata omnes radices euadunt poſitiuae, adeoque numerus ille negatiuus n, quo radices minuuntur, eiusmodi eſt, vt radices omnes efficiat poſitiuas, adeoque vt ſuperet quamuis radicem negatiuam.

86. *Coroll.* Poterit limes radicum negatiuarum etiam eodem modo inquiri, quo poſitiuarum, mutando nempe alterna ſigna, atque ita radices negatiuas conuertendo in poſitiuas (40).

Exempla.

I. Sit aequatio $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$, cuius radicum limites excedentes quaerantur. Factis pro more deriuationibus habebuntur sequentes formulae

$$x^3 - x^2 - 14x + 24$$
$$3x^2 - 2x - 14$$
$$3x - 1$$

Si iam pro x vbiqve ponatur 1, vel 2, vel 3, summa non erit vbique positiua; at si ponatur 4, erit summa terminorum in prima $= 16$, in secunda $= 26$, in tertia $= 11$: ergo numerus 4 superat quamuis radicem positiuam. Et certe vna radicum positiuarum est $= 3$ altera $= 2$.

Pro inuestigando limite radicis negatiuae frustra assumerentur pro x numeri $-1, -2, -3$, at si assumatur -5, erit summa terminorum in formula prima $= -56$, in secunda $= 71$, in tertia $= -16$: ergo -5 superat radicem negatiuam, quae sane est $= -4$. Quodsi pro x assumtus fuisset numerus -4, summa in prima formula, seu in aequatione ipsa proposita prodiisset $= 0$, vnde statim adparuisset radicem negatiuam esse $= -4$ (10).

II. Sit aequatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, cuius radicum limites excedentes quaerantur. Factis deriuationibus habebuntur sequentes formulae

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$$
$$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$$
$$10x^3 - 12x^2 - 30x + 30$$
$$10x^2 - 8x - 10$$
$$5x - 2$$

Si iam pro x vbique ponatur 2, erit summa vbique positiua, nempe in prima $= 46$, in secunda $= 79$, in tertia $= 2$, in quarta $= 14$, in quinta $= 8$: ergo numerus 2 superat quamlibet radicem positiuam.

Pro inueſtigando limite radicum negatiuarum fruſtra aſſumeretur pro x numerus -1, vel -2; at ſi aſſumatur -3, ſumma in formulis dimenſionis imparis erit negatiua, in formulis dimenſionis paris poſitiua: ergo -3 ſuperat quamuis radicem negatiuam.

III. Sit aequatio $x^5-x^4-7x^3+x^2+4x-4=0$, cuius radicum limites excedentes quaerantur. Factis deriuationibus habebimus formulas ſequentes

$$x^5-x^4-7x^3+x^2+4x-4$$
$$5x^4-4x^3-21x^2+2x+4$$
$$10x^3-6x^2-21x+1$$
$$10x^2-4x-7$$
$$5x-1$$

Si iam pro x vbique poneretur 1, vel 2, vel 3, ſumma non prodiret vbique poſitiua; prodit autem, ſi pro x ponatur 4: ergo numerus 4 ſuperat quamuis radicem poſitiuam.

Limitem radicum negatiuarum indagabimus mutando alterna terminorum ſigna (86). Factis igitur deriuationibus obuenient formulae

$$x^5+x^4-7x^3-x^2+4x+4$$
$$5x^4+4x^3-21x^2-2x+4$$
$$10x^3+6x^2-21x-1$$
$$10x^2+4x-7$$
$$5x+1$$

Si iam pro x ponatur 2, prima formula, ſeu aequatio ipſa propoſita fiet $=0$, in reliquis ſumma erit vbique poſitiua: ergo -2 eſt radix negatiua aequationis, ſimulque ſuperat omnes reliquas radices negatiuas.

87. *Probl. Inueſtigare eoſdem limites ope numerorum mediorum arithmetice proportionalium.*

Reſol.

Reſol. In propoſita aequatione pro incognita ſubſtituantur ſucceſſiue diuerſi valores, deuenietur ad ſubſtitutionem aliquam, e qua valor aequationis obueniat poſitiuus, item ad aliam, e qua valor prodeat negatiuus. Quia vero, ſicuti patebit in ſequentibus, in eo tranſitu a valore poſitiuo ad negatiuum tranſit aequatio per nihilum, ſeu per valorem $=0$, inter binos illos valores pro incognita aſſumtos latebit radix aliqua aequationis, cui reſpondet valor ille $=0$. Ponatur deinde pro incognita medius arithmetice proportionalis inter binos illos antea poſitos, obueniet valor aequationis, cuius ſignum neceſſario congruet cum ſigno alterius e valoribus ante inuentis, et opponetur alteri. Rurſus ponatur pro incognita medius arithmetice proportionalis inter valorem poſtremo loco poſitum, et inter illum e praecedentibus, qui valorem aequationis exhibuit habentem ſignum contrarium ſigno valoris ab eodem exhibiti. Denique eadem methodo ſemper aſſumatur valor medius inter poſtremo aſſumtum, et praecedentem, e quo valor aequationis profluxit ſigni oppoſiti: valores hi aſſumti ſemper magis ac magis accedent ad ſe inuicem, adeoque etiam ad radicem intermediam, cuius proinde limites hac operatione, quantum libuerit, coarctari poterunt.

E. g. Si quaerantur limites radicis cuiuſpiam aequationis $x^3 - 30x + 36 = 0$, ſi fiat $x = 3$, erit aequatio $= -27$; et ſi fiat $x = 7$, erit aequatio $= 169$: latet ergo radix aliqua inter 3 et 7, ad quam accedetur calculo inito iuxta tabellam ſequentem.

A=3	−27	A=3	−27	D=4	−20	E=4,5	−7,875	F=4,7	−1,177	F=4,7
C=5	11	D=4	−20	E=4,5	−7,875	F=4,7	−1,177	G=4,8	2,592	H=4,75
B=7	169	C=5	11	C=5	11	C=5	11	C=5	11	G=4,8

Cum e valoribus A et B prodierint valores aequationis diuerſorum ſignorum, nempe -27, et 169, inter A et B ſu-

matur medius C, vnde valor aequationis obuenit positiuus 11: igitur inter A et C sumatur medius D, vnde valor aequationis prodit negatiuus — 20; quare inter D et C sumatur medius E, vnde valor obuenit negatiuus — 7,875; hinc rursus inter E et C sumatur medius F, tum inter F et C medius G, ac inter F et G medius H, et sic porro.

Scholion. Ne vero calculus fractionum decimalium in vlterioribus operationibus molestus sit, inuentis limitibus a vero radicis valore non nimium distantibus adferemus in sequentibus magis expeditam methodum ad valorem radicis quantum libuerit adproximandi.

CAPVT V.

De incrementis, et decrementis valorum aequationis e continua incognitae mutatione oriundis.

88. Sit aequatio quaecunque $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}$ etc. $+ r = 0$, in qua literae a, b, c, r etc. designent quasuis quantitates constantes. Concipiatur primum valor incognitae x esse negatiuus, et ingens, qui continenti additione decrescat, tum euadat $= 0$, et additione porro continuata reddatur positiuus, crescatque deinceps ex parte positiua in immensum. In his incognitae mutationibus continenter mutabitur valor totius aequationis iuxta sequentes leges.

1). Si valor incognitae x mutetur per omnes intermedios gradus magnitudinis sine saltu, etiam valor aequationis mutabitur sine saltu transeundo per omnes magnitudines intermedias. Cum enim in ea mutatione quantitatis x incrementum vel decrementum concipiatur minui infra quosuis limites determinatos, etiam potentiarum eiusdem quarumuis, et cuiusuis aggregati

quotcunque potentiarum, ſeu totius aequationis incrementum vel decrementum pariter minuetur infra quoscunque limites: quare creſcente vel decreſcente x incrementis vel decrementis non interruptis, etiam aequatio ipſa eodem pacto creſcet vel decreſcet. Certe quicunque duo valores aequationis vtcunque ſibi proximi accipiantur, ſingulis reſpondebit aliquis valor incognitae x, et omnibus valoribus intermediis reſpondebunt valores intermedii, et diuerſi eiuſdem x.

2) Dum continua hac mutatione valor aequationis e negatiuo abit in poſitiuum, aut e poſitiuo in negatiuum, tranſit neceſſario per nihilum, vel per infinitum, ac poſitiua cum negatiuis nectuntur quodammodo in nihilo, vel in infinito, uti e curuarum geometria perſpicuum eſt.

E. g. quantitas $4-x$ eſt poſitiua, quamdiu $4>x$; creſcente autem x decreſcet, donec euadente $x=4$ euadat $=0$: tum adhuc creſcente x euadet negatiua. Quare hic valor poſitiuus abit in negatiuum tranſeundo per nihilum.

Similiter quantitas $\frac{8}{4-x}$ eſt poſitiua, quamdiu $4>x$; at creſcente x, et ad 4 vltra quosuis limites accedente creſcet vltra quosuis limites: nam poſito $x=3$, vel $=3,9$, vel $=3,99$ etc. euadit $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0,1}$, $\frac{8}{0,01}$ etc. ſeu numeratores per denominatores reapſe diuidendo euadit 8, 80, 800 etc; ac facto $x=4$, euadit $\frac{8}{0}=\infty$, tum aucto x abit in negatiuam, cum poſito $x=5$ iam fiat $=\frac{8}{-1}=-8$. Hic adeo valor poſitiuus abit in negatiuum tranſeundo per ∞.

3) In adpulſu ad nihilum, vel ad infinitum non fit ſemper tranſitus a valore poſitiuo ad negatiuum, aut contra: ſed ſaepe fit regreſſus cum eodem ſigno, quocum fuit adpulſus.

E. g. quantitas $(4-x)^2=16-8x+x^2$ eſt poſitiua, quamdiu $x<4$: facto $x=4$ euadit $=0$; tum aucto valore x, redit e nihilo cum eodem ſigno poſitiuo, et x infinite creſcente manebit poſitiua. Eodem modo quantitas $-x^2+8x-16$ ſemper negatiua, facto $x=4$, euadit $=0$, tum aucto x cum eodem ſigno regreditur e nihilo.

Similiter quantitas $\frac{8}{16-8x+x^2}$ eſt poſitiua, quamdiu $x<4$; creſcente x, ac euadente $=4$, euadit $=\infty$; tum adhuc creſcente x, incipit decreſcere ex eadem parte poſitiua. Nam ſi fiat x ſucceſſiue aequalis 2, 3, 3.9, 4, 4.1, 5, 6 etc. euadet $\frac{8}{4}, \frac{8}{1}, \frac{8}{0,01}, \frac{8}{0}, \frac{8}{0,01}, \frac{8}{1}$ etc. ſeu 2, 8, 800, ∞, 800, 8, 2 etc. Eodem modo quantitas $\frac{8}{-x^2+8x-16}$ ſemper negatiua abit in ∞ facto $x=4$; tum vltra aucto x regreditur ab infinito, ſed ſemper manebit negatiua.

4) Valor aequationis decreſcens incipit interdum iterum creſcere, vel creſcens incipit decreſcere, antequam in infinitum, vel nihilum abeat: ac in caſu primo habet valorem quemdam *minimum* ibi, ubi decrementum mutat in incrementum; et in ſecundo habet *maximum* ibi, vbi incrementum mutat in decrementum.

E. g. Aequationis $x^2-8x+20$ valor eſt ſemper poſitiuus ſiue x quantitas poſitiua, ſiue negatiua ſit; at dum x, quam ponimus eſſe minorem quam 4, perpetuo augetur, aequationis valor continenter decreſcit, et fit minimus, vbi x euadit $=4$; tum creſcente x creſcit in infinitum. Eſt enim $x^2-8x+20=(x-4)^2+4$ vel $=(4-x)^2+4$; atqui $(x-4)^2$ vel $(4-x)^2$ ſemper eſt quantitas poſitiua maior, vel minor, prout x magis diſtat a 4, ac fit $=0$, vbi x euadit $=4$: quare $x^2-8x+20$

etiam tunc eſt quantitas poſitiua, ſed minima, cum eſt $x=4$. Idem eſt de quantitate negatiua $-x^2+8x-20$, cuius pariter valor eſt minimus, dum x fit $=4$.

Eodem modo valor aequationis $\frac{8}{x^2-8x+20}$ ſemper eſt poſitiuus, et accedente x ad 4 creſcit, fitque maximus, dum x euadit $=4$; deinde creſcente x iterum decreſcit. Idem eſt de quantitate negatiua $\frac{8}{-x^2+8x-20}$, cuius itidem valor eſt maximus, cum x fit $=4$.

5) In hiſce valorum mutationibus ſaepe plures habentur adpulſus ad nihilum cum, vel ſine tranſitu ad ſignum contrarium; ſape item plures valores maximi, vel minimi. Sane dum radix aequationis x adpellit ad nihilum tota aequatio fit $=0$, tranſitque deinde ad ſignum contrarium, niſi in eo adpulſu habeatur radicum aequalium numerus par, ſi enim par habeatur earundem numerus, ſemper fit regreſſus a nihilo cum eodem ſigno, vti dicemus in ſequentibus.

6) Si coefficientes aequationis ſint quantitates finitae, nequit valor aequationis euadere infinitus, quamdiu incognita x finita eſt. Nam in hoc caſu quiuis aequationis terminus continet quantitatem finitam cognitam, vel nunquam, vel aliquoties ductam in quantitatem pariter finitam x: quare terminorum omnium ſumma, ſeu valor totius aequationis nequit eſſe infinitus.

7) Denique ſi pro incognita x bini valores aſſumantur, e quorum altero prodeat valor aequationis poſitiuus, ex altero negatiuus, inter duos illos aſſumtos valores neceſſario continebitur radix aliqua realis, qua pro x aſſumta valor aequationis fit $=0$. Nequit enim valor ille e poſitiuo tranſire hoc caſu in negatiuum per infinitum, uti paulo ante oſtendimus: ergo debet tranſire per nihilum: quare inter duos illos valores pro x aſſumtos latet ali-

quis valor eiusdem x respondens valori illi aequationis $=0$, qui valor est radix aequationis (9).

Scholion. Expensis hisce transmutationum legibus addemus nonnulla theoremata, quorum attenta contemplatio non modo ad has ipsas valorum mutationes clarius peruidendas mirifice faciet; sed etiam aequationum, totiusque artis analyticae indolem haud parum illustrabit.

89. *Theor. Si valor incognitae concipiatur in immensum auctus, vel in immensum diminutus; primus aequationis terminus erit ceteris in immensum maior, vel in immensum minor, ita vt ad quemuis sequentem terminum possit habere rationem vtcunque magnam, vel vtcunque paruam.*

Demonstr. Sit terminus primus aequationis x^{m+n}, et quiuis alius bx^m, ac ratio quaeuis vtcunque magna vel parva $1:p$; erit $x^{m+n}:bx^m=x^n:b$. Fiat $t^n=p$, $c^n=b$, ponaturque $x=\frac{c}{t}$, erit $x^n=\frac{c^n}{t^n}=\frac{c^n}{p}$, vnde $x^n:b=x^n:c^n=\frac{c^n}{p}:c^n=c^n:pc^n=1:p$, id quod semper verum erit, vtcunque p sit quantitas parua vel magna, qua decrescente, vel crescente in infinitum, decrescet vel crescet t^n, adeoque viciſſim crescet vel decrescet $x=\frac{c}{t}$.

90. *Theor. In eodem casu poterit valor incognitae x assumi ita magnus vel ita paruus, vt quiuis terminus altiorem eiusdem potentiam continens sit in immensum maior summa omnium inferiores eiusdem potentias continentium in primo casu: vel quiuis terminus inferiorem eius potentiam continens sit in immensum maior summa omnium altiores eiusdem potentias continentium in casu secundo.*

Demonstr. Sit numerus omnium terminorum $=n$, ratio quaeuis vtcunque magna $1:q$; fiat $p=qn$, poterit valor incognitae x assumi tam magnus, vel tam paruus, vt terminus conti-

nens in casu primo potentiam eiusdem superiorem, in casu secundo inferiorem habeat ad quemuis e reliquis rationem 1 : p (89) seu 1 : qn: ergo diuiso termino illo in numerum partium aequalium n, quaeuis ex iis habebit ad quemuis e reliquis rationem 1 : q, adeoque etiam totus ille terminus erit ad reliquorum summam vt 1 : q.

91. *Coroll.* 1. Si ergo pro incognita x assumatur valor satis magnus negatiuus, erit in aequationibus gradus imparis terminus primus negatiuus, in aequationibus gradus paris positiuus: cumque in hoc casu terminus primus excedat summam sequentium (90), erit valor aequationis in illis negatiuus, in his positiuus. Sin autem pro x ponatur valor positiuus satis magnus, terminus primus, adeoque etiam valor cuiusuis aequationis semper erit positiuus.

92. *Coroll.* 2. Hinc autem consequitur illud, quod iam alibi adnotauimus (38), in qualibet aequatione gradus imparis vnam adminus haberi radicem realem. Nam in ea posito valore satis magno negatiuo pro x, valor aequationis fit negatiuus; et posito valore positiuo satis magno, valor idem fit positiuus (91): quare inter duos illos valores pro x assumtos semper continebitur radix aliqua realis intermedia (88).

93. *Coroll.* 3. Radicum item realium numerum in aequatione gradus imparis semper esse imparem; in aequatione autem gradus paris non posse esse nisi parem. Sit enim cuiusuis aequationis incognitam x continentis radix realis $= p$, poterit illa aequatio exacte diuidi per $x - p$ (21), eritque quotus noua aequatio vno gradu depressior continens reliquas radices: quare si aequatio illa prior fuit gradus imparis, haec altera erit gradus paris, quae si rursus habeat vnam radicem realem $= q$, poterit accurate diuidi per $x - q$, ac orietur aequatio depressior gradus imparis

neceſſario habens ſaltem vnam radicem realem $= r$ (92), ac proinde exacte poterit diuidi per $x - r$: ergo propoſita aequatio gradus imparis habens neceſſario radicem vnam realem (92)$= p$, ſi habet duas p et q, habet neceſſario et tertiam r; ſi habet quatuor, habet neceſſario et quintam, et ſic porro. Similiter ſi aequatio gradus paris habet vnam, neceſſario habet etiam ſecundam; ſi habet tres, habet etiam quartam, et ſic deinceps.

94. *Coroll.* 4. Numerus radicum imaginariarum in aequatione quacunque nequit eſſe, niſi par, quod item iam alias oſtendimus (37). Imprimis enim in aequationibus gradus imparis numerus omnium radicum eſt impar (23), et numerus realium etiam impar (93): ergo numerus imaginariarum debet eſſe par, cum nequeat numerus omnium radicum impar conſurgere e duobus numeris imparibus. Deinde in aequationibus gradus paris numerus omnium radicum eſt par (23), et realium etiam par (93); ergo par debet eſſe etiam imaginariarum, cum nequeat numerus omnium radicum par coaleſcere e pari, et impari numero.

95. *Theorema. Valor aequationis habentis radices omnes reales, et inaequales, poſt adpulſum ad nihilum tranſit ad ſignum contrarium.*

Demonſtr. Si enim eiuſmodi aequatio fuerit gradus imparis, poſito pro x valore negatiuo ſatis magno, aequationis valor erit negatiuus ſatis magnus (91), deinde incognita x ex parte negatiua decreſcente continenter decreſcet, ac adpellente x ad valorem primae radicis fiet $= 0$, ac erit deinceps poſitiuus initio creſcens; tum incipiet alicubi neceſſario decreſcere, cum adpellente x ad valorem ſecundae radicis debeat iterum euadere $= 0$; poſtea erit negatiuus initio creſcens, tum decreſcens, donec rurſus euadat $= 0$ adpellente x ad valorem tertiae radicis, et ſic porro.

porro. Sin autem aequatio fuerit gradus paris valor eiusdem initio positiuus abibit in negatiuum post adpulsum incognitae x ad valorem primae radicis, tum in positiuum, et sic deinceps. Vnde simul adparet valorem aequationis inter quasuis duas radices reales alicubi euadere maximum.

Scholion. Vt exempla in sequentibus occurrentia clarius intelligi possint, valores aequationis positiuos repraesentabimus per curuae cuiuspiam ordinatas sursum tendentes, negatiuos autem per ordinatas deorsum vergentes, ipsos autem incognitae x adpulsus ad radices per intersectiones, in quibus axi abscissarum curua occurrit, vbi proinde nulla ordinata est, seu valor aequationis nihilo aequatur.

E. g. Si in aequatione $x^5 - 7x^4 - 7x^3 + 79x^2 + 6x - 72 = 0$, cuius radices sunt -3, -1, 1, 4, 6, pro x ponatur quiuis numerus negatiuus satis magnus, valor aequationis MN erit negatiuus, ac adpellente x ad radicem primam -3, valor idem fit $= 0$ deinceps transit in positiuum OP, manebitque positiuus initio crescens, tum decrescens, quamdiu valor incognitae x versatur inter primam radicem -3, et inter secundam -1; at vbi fit $x = -1$, valor idem rursus fit $= 0$, tum abit in negatiuum QR, manebitque negatiuus primum crescens, tum decrescens, quamdiu valor x versatur inter secundam radicem -1, et tertiam 1; at vbi fit $x = 1$, denuo idem aequationis valor fit $= 0$, tum abit in positiuum ST inter radices 1 et 4, ac rursus in negatiuum VX inter radices 4 et 6; at post adpulsum ad radicem 6 semper deinceps manebit positiuus. Fig. 1.

96. *Theor. Dum valor incognitae adpellit ad numerum parem radicum aequalium, aequationis valor post nihilum non mutat signum, sed regreditur a nihilo retento signo: transit contra per nihilum signo*

mutato, ſi valor incognitae adpellat ad numerum imparem radicum aequalium.

Demonſtr. Si binarum radicum valores e. g. in exemplo ſuperiore — 3 et — 1 ad ſeſe mutuo accedant, minuitur ſenſim arcus interceptus P, ſeu interuallum illud, in quo valor aequationis in radice prima — 3 tranſiens per nihilum initio creuit, tum decreuit, et in ſecunda radice — 1 iterum deuenit ad nihilum: ergo binis illis radicibus — 1 et — 3 ita ſenſim coeuntibus, vt tandem euadant inter ſe aequles, interuallum illud penitus elidi-tur, et punctis interſectionum — 3 et — 1 congruentibus penitus euaneſcit arcus P, ac arcum N immediate excipit arcus R, adeoque valor aequationis in adpulſu ad duas radices aequales, ſeu ad vnam radicem duplicem a nihilo regreditur retento ſigno. Si tres radices — 3, — 1, et 1 fiant aequales, patet tribus his interſectionum punctis congruentibus euaneſcere arcus P et R, ac poſt arcum N continenter ſequi arcum T, adeoque valorem aequationis tranſire per nihilum mutato ſigno. Si quatuor radices — 3, — 1, 1 et 4 fiant aequales, congruentibus quatuor interſectionum punctis euaneſcunt arcus P, R, T, et arcum N continenter excipit arcus X, adeoque valor aequationis a nihilo regreditur retento ſigno, et ſic deinceps.

Fig. 2. E. g. Sit aequatio $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$, habens eaſdem radices, quas aequatio ſuperior, niſi quod duae poſtremae 4 et 6 in hac ſint aequales, nempe ambae 4: punctis 4 et 6 Figurae primae coeuntibus euaneſcet arcus X, adeoque curua mutabitur in hanc praeſentem, ac valor aequationis a — 3 vſque ad — 1 erit poſitiuus; a — 1 vſque ad 1 erit negatiuus, ab 1 vſque ad 4″ erit poſitiuus, tum in ipſo quidem adpulſu incognitae x ad 4″ fiet = 0, at deinceps iterum regrediens a nihilo manebit poſitiuus, vti adparebit ſubſtituenti.

Sit aequatio $x^5 - 8x^4 + 3x^3 + 92x^2 - 112x - 192 = 0$ habens radices $-3, -1, 4, 4, 4$; iam in Figura prima congruentibus tribus poſtremis punctis 6, 4, 1, euaneſcent arcus X et T, et curua abibit in hanc praeſentem, adeoque valor aequationis $a - 3$ vſque ad -1 erit poſitiuus, $a - 1$ vſque ad $4'''$ erit negatiuus, et a $4'''$ deinceps ſemper poſitiuus, vnde adparet in illa radice triplici $4'''$ valorem aequationis tranſire per nihilum, et mutare ſignum. Fig. 3.

Sit aequatio $x^5 - 13x^4 + 32x^3 - 512x + 768 = 0$ habens radices $-3, 4, 4, 4, 4$; iam in Figura prima congruentibus quatuor poſtremis punctis 6, 4, 1, -1, euaneſcent arcus X, T, R, et curua mutabitur in hanc praeſentem, ac proinde valor aequationis $a - 3$ vſque ad $4'''$ erit poſitiuus, ac facto $x = 4'''$ adpellet quidem ad nihilum, verum non tranſibit, ſed ex eadem parte poſitiua regredietur. Fig. 4.

97. *Coroll.* 1. Fieri poteſt, vt radices binae aequales ſint imaginariae, dum nempe valor aequationis, qui alias regrederetur a nihilo ſigno priore retento (96), non pertingit ad nihilum, ſed regreditur ante nihilum, incipitque iterum creſcere.

E. g. In aequatione $x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 7x - 51 = 0$, cuius radices ſunt $-3, -1, 1, 4 + \sqrt{-1}, 4 - \sqrt{-1}$, valor $a - 3$ vſque ad -1 eſt poſitiuus, $a - 1$ vſque ad 1 eſt negatiuus initio creſcens, tum decreſcens, et antequam deueniat ad nihilum, creſcere iterum incipiens, ac deinceps creſcens in infinitum, vti patebit ſubſtituenti: adeoque Figura prima mutatur in hanc praeſentem. Fig. 5.

98. *Coroll.* 2. Dum aequatio habet valorem quemdam minimum, ita vt a decreſcendo e. g. vſque ad T tranſeat ad creſcendum ſine adpulſu ad nihilum, ſemper habebuntur binae ſaltem radices imaginariae; contra vero ſi adſint binae radices imagina-

riae, non ſemper habebitur valor ille minimus, ſed ſaepe intervallum illud ab R vſque ad T eliditur, pergitque valor continenter creſcere.

Fig. 6. E. g. In aequatione $x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 33x^2 + 8x - 30 = 0$, cuius radices ſunt $-3, -1, 1, 2+\sqrt{-1}, 2-\sqrt{-1}$, valor $a-3$ vſque ad -1 eſt poſitiuus, $a-1$ vſque ad 1 eſt negatiuus, tum ſemper eſt poſitiuus creſcens, vti patebit ſubſtituenti, et exhibetur in Fig. 6.

CAPVT VI.

De Maximis, et Minimis aequationum valoribus.

99. Vt determinentur valores incognitae x, quibus reſpondent valores maximi, vel minimi aequationis, conſideranda veniunt incrementa, vel decrementa valorum aequationis orta e perpetuo incremento incognitae x. Porro haec incrementa, vel decrementa valorum ſiue aequationis ipſius, ſiue incognitae x appellabimus in ſequentibus *differentialia*, et incrementum quidem incognitae x per dx deſignabimus.

100. Sit igitur aequatio quaecunque $x^m + ax^n + bx^r$ etc. in qua incognita x creſcat differentiali dx: mutabuntur hoc ipſo omnes termini, in quibus eſt x, et ſiquidem in ſingulis pro x ſubſtituatur $x+dx$, emerget noua aequatio, e quà ſi prior illa tollatur, obtinebitur differentiale aequationis propoſitae ortum ex illo differentiali dx incognitae x. Quia vero haec differentialia inquirendi methodus ſaepe operoſa eſt, aliam generalem hic iam adferemus.

101. *Probl. Datae cuiuſuis aequationis differentiale inuenire.*

Reſol. Sit aequationis propoſitae quiuis terminus px^t, ponendo $x+dx$ pro x, fiet $px^t = (x+dx)^t = px^t + tpx^{t-1}dx +$

$\frac{t.t-1}{1.2}px^{t-2}dx^2+\frac{t.t-1.t-2}{1.2.3}px^{t-3}dx^3$ etc. vnde tollendo px^t reſtabit illius termini differentiale $tpx^{t-1}dx+\frac{t.t-1}{1.2}px^{t-2}dx^2+\frac{t.t-1.t-2}{1.2.3}px^{t-3}dx^3$ etc. Si iam ſumma omnium terminorum tpx^{t-1}, qui proueniunt ex omnibus aequationis propoſitae terminis, ſit $=P$, ſumma omnium $\frac{t.t-1}{1.2}px^{t-2}$ ſit $=Q$, ſumma omnium $\frac{t.t-1.t-2}{1.2.3}px^{t-3}$ ſit $=R$ etc. erit differentiale quaeſitum $Pdx+Qdx^2+Rdx^3$ etc.

Porro P ſeu tpx^{t-1} oritur ex px^t ducto in t, exponentem ſcilicet incognitae x, ac diuiſo per x. Q oritur ex P ducto in $t-1$, exponentem ſcilicet incognitae x, ac diuiſo per $2x$. R oritur ex Q ducto in exponentem $t-2$, ac diuiſo per $3x$, et ſic porro. Sunt adeo P, Q, R etc. *aequationes deriuatae* (69, 70), in qua deriuatione terminus ille, qui in praecedente aequatione carebat incognita x, ſeu continebat x^0, euaneſcit, cum ducatur in exponentem 0, atque ita inter deriuandum decreſcit terminorum numerus, ac in poſtremo deriuata deerit incognita x, e qua ſi porro deriuetur noua formula, erit ea $=0$.

E. g. Quaeratur differentiale aequationis $x^4-16x^3+88x^2-192x+120=0$, quae vocetur A, erunt aequationes ex eadem deriuatae

$$P=4x^3-48x^2+176x-192$$
$$Q=6x^2-48x+88$$
$$R=4x-16$$
$$S=1$$

Si iam formula P ducatur in dx, Q in dx^2, R in dx^3: S in dx^4 etc. habebitur differentiale quaeſitum aequationis propoſitae.

102. *Coroll.* 1. Si pro x ponatur valor quiuis determinatus, non tamen eiuſmodi, vt ex ea poſitione formula P euadat $=0$, et concipiatur dx in immenſum minui, omnes termini Qdx^2+Rdx^3 etc. in immenſum minores erunt termino primo Pdx (90), ac totum differentiale erit proxime aequale eidem Pdx, adeoque idem habebit ſignum, quod habet Pdx. Quare ſi Pdx habuerit ſignum conforme valori aequationis propoſitae, valor ille accipiet incrementum, ſi difforme, decrementum.

103. *Coroll.* 2. Si fuerit $P=0$, primo termino differentialis Pdx euaneſcente, ſecundus Qdx^2 exprimet quam proxime differentiale aequationis. Si tam P, quam Q fuerit fuerit $=0$, idem differentiale exprimet terminus tertius Rdx^3, et ſic porro.

104. *Theor. Dum valor aequationis propoſitae deuenit ad aliquod maximum, vel minimum, debet aequatio primo deriuata* P *eſſe* $=0$.

Demonſtr. Vbi enim valor aequationis fit maximus, vel minimus, tranſit a creſcendo ad decreſcendum, aut contra: atqui extra eos caſus, in quibus x habet valorem formulam P ad nihilum redigentem, id eſt, valorem radicis aequationis $P=0$, valor aequationis accipit incrementum, vel decrementum, prout P habet ſignum conforme, vel difforme ipſius ſigno (102): ergo cum valore aequationis ad aliquod maximum adpellente, vel ad aliquod minimum debeat incrementum mutari in decrementum, aut contra, debet P mutare ſignum, adeoque tranſire per nihilum (88), cum nequeat tranſire per infinitum, ſeu debet eſſe $P=0$.

105. *Coroll.* Nomine minimi veniunt etiam illi caſus, in quibus valor aequationis ad nihilum adpellens inde regreditur ſigno retento, eſtque illic valor ille minimus $=0$; non autem veniunt illi, in quibus transgreſſo nihilo mutatur valoris ſignum: cum enim hic tranſitus fiat per continuam additionem, vel ſubtractio-

nem, non mutantur reapſe decrementa vel incrementa, ſed quodam modo continuantur.

106. *Probl. Data aequatione habente maximum, vel minimum, inuenire valorem incognitae maximo illi valori, vel minimo reſpondentem.*

Reſol. E data aequatione deriuetur aequatio P lege antedicta (101), et ponatur = 0; inter huius radices continebuntur omnes ii valores incognitae x, quibus reſpondet valor maximus, vel minimus propoſitae aequationis.

Demonſtr. Dum enim incognita x eos valores aſſequitur, quibus valor ille maximus, vel minimus reſpondet, aequatio deriuata P fit = 0 (104): ergo valores illi incognitae x aequationum P redigunt ad nihilum, ac proinde inter eiuſdem radices continentur (9).

E. g. Sit numerus 8 in partes duas ita partiendus, vt ſi a quarta potentia differentiae inter vnam partem, et dimidium totius numeri 8 dematur octuplum quadratum differentiae inter partem alteram, et idem dimidium, reſiduum ſit maximum, vel minimum.

Sit pars vna $= x$, erit altera $= 8 - x$, et illius differentia a dimidio erit $x - 4$, huius $8 - x - 4$, ſeu $4 - x$; prioris quarta potentia erit $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$, poſterioris octuplum quadratum erit $128 - 64x + 8x^2$, quo ablato a priore habebitur formula $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$, cuius maximum, vel minimum quaeritur.

Facta igitur deriuatione erit $P = 4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 0$, ſeu per 4 diuidendo $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, cuius radices ſunt 2, 4, 6, vti patebit ſubſtituenti. Si iam in ſuperiore illa aequatione, cuius maximum, vel minimum quaeritur, pro x ponatur initio valor quiuis negatiuus, qui continua additio-

ne minuatur, tum euadat=0, deinde fiat positiuus, minor tamen, quam 2, valor aequationis MN initio positiuus perpetuo decrescet, ac transiens per nihilum euadet negatiuus crescens tamdiu, donec fiat $x=2$, ac ibi euadet maximus, tum decrescet, ac facto $x=4$ fiet=0; tum aucto x regredietur ex eadem parte negatiua, euadetque maximus facto $x=6$, tum decrescere incipiet, ac transiens per nihilum deinceps continenter crescet ex parte positiua. Habet ergo aequatio proposita bina maxima valoribus $x=2$, et $x=6$ respondentia, ac vnum minimum=0 respondens valori $x=4$.

Fig. 7.

107. *Coroll.* Si data aequatio habeat valorem maximum, vel minimum, valor incognitae x, cui is respondet, erit equidem semper inter radices aequationis primo deriuatae P=0; non tamen viciſſim omnes radices aequationis P=0 maximum quoddam, vel minimum exhibent.

E. g. Si in exemplo priore quaeratur maximum, vel minimum residuum, vbi ex illa quarta potentia auferatur idem illud quadratum assumtum vicibus 16, et partis prioris octuplum quadratum; a potentia $x^4-16x^3+96x^2-256x+256$ auferendum erit $16x^2-128x+256$, et $8x^2$, adeoque residuum, cuius maximum, vel minimum quaeritur, erit $x^4-16x^3+72x^2-128x$, vnde deriuata aequatione P erit $4x^3-48x^2+144x-128=0$, seu omnia per 4 diuidendo erit $x^3-12x^2+36x-32=0$, cuius radices sunt 2, 2, 8, quarum priores duae nec maximum, nec minimum exhibent. Si enim pro x ponatur valor satis magnus negatiuus, qui sensim decrescat, et transeat in positiuum, valor datae aequationis MN initio erit positiuus, satis magnus, tum decrescet, ac transgresso nihilo fiet negatiuus, pergetque ex parte negatiua crescere tam antequam fiat $x=2$, quam postea, donec facto $x=8$ euadat maximus; deinde vltra

Fig. 8.

cre-

creſcente x decreſcet, tranſibit per nihilum, fiat poſitiuus, ac perpetuo creſcet ex parte poſitiua.

Scholion. Ex his adparet, poſita aequatione primo deriuata $P=0$, ſeu, quod idem eſt, poſito alicuius aequationis differentiali $=0$, radices aequationis P non poſſe generatim aſſumi pro inueſtigatione maximorum, vel minimorum: licet enim in aequatione quauis propoſita nullum poſſit haberi maximum vel minimum, quin ei reſpondens valor incognitae contineatur inter radices aequationis $P=0$ (106); non ſemper tamen viciſſim omnes eae radices exhibent maximum, vel minimum. Quare generalis quaedam regula eruenda eſt, e qua definiri poſſit, vtrum aequationis deriuatae $P=0$ radix quaepiam maximum vel minimum aliquod exhibeat, vtrum nullum: item an exhibeat maximum potius, quam minimum.

108. *Theor. Nequit aequatio quaecunque gradus cuiuscunque* m *habere plura maxima vel minima, quam numero* $m-1$.

Demonſtr. Si enim aequatio propoſita fuerit gradus cuiuſcunque m, erit eiuſdem primo deriuata P gradus $m-1$ (101), quae nequit habere plures radices, quam $m-1$ (23): atqui omnes valores incognitae x maxima vel minima exhibentes inter radices aequationis $P=0$ contineri debent (106); quare numerus maximorum, vel minimorum nequit eſſe maior, quam $m-1$.

109. *Theor. Si data aequatio habeat omnes radices reales, et inaequales, etiam eiuſdem primo deriuata* P *habebit omnes reales, et inaequales, quarum quaeuis exhibebit aliquod maximum aequationis propoſitae, et nulla earum congruet cum radicibus eiuſdem.*

Demonſtr. Nam inter binas quaſuis proximas inaequales radices propoſitae aequationis continentur ſingula eiuſdem maxima (95), adeoque ſinguli valores incognitae x iis maximis reſpondentes continentur inter duas radices inaequales aequationis pro-

positae, nempe vnus inter primam et secundam radicem, alter inter secundam et tertiam, et sic porro: quare si eae radices sint numero n, valores illi incognitae x erunt numero $m-1$, et quidem omnes reales, et inaequales, cum quiuis lateat inter duas datae aequationis reales, et inaequales; debentque hoc ipso esse omnes diuersi e radicibus datae aequationis: atqui omnes hi valores incognitae x sunt radices aequationis $P=0$ (106), quae nequit habere plures radices, quam numero $m-1$ (23, 108): ergo radices aequationis $P=0$ singulae aliquod maximum exhibebunt, eruntque reales, inaequales, diuersae a radicibus aequationis propositae.

110. *Theor. Si data aequatio contineat radicum aequalium numerum* n, *aequatio primo deriuata* P *continebit numerum earundem* $n-1$, *secundo deriuata* Q *numerum* $n-2$, *tertio deriuata* R *numerum* $n-3$, *et sic porro.*

Demonstr. Cogitentur enim datae aequationis cuiusuis radices duae coire, et aequales fieri, illud maximum inter ipsas interceptum (109) iam fiet minimum, seu $=0$, ac valor aequationis a nihilo regredietur (96): ergo valor incognitae x ei minimo, seu nihilo respondens debet contineri inter radices aequationis primo deriuatae $P=0$ (106), qui valor ibi congruet cum duabus illis congruentibus datae aequationis radicibus: quare si data aequatio duas habeat radices aequales, primo deriuata P habebit ex iis communem vnam. Eodem modo patet, si tres radices coeant in data aequatione, binas aequationis $P=0$ radices, quae tribus illis interiacebant, cum iisdem congruere: et generatim si illic coeat numerus radicum n, aequationem $P=0$ habituram earum radicum numerum $n-1$. Cumque eadem plane lege deriuetur Q ex P, qua P ex data aequatione, item R ex Q, S ex R etc. quarum radicum aequatio $P=0$ habebit numerum $n-1$, earun-

dem $Q=0$ habebit numerum $n-2$, $R=0$ numerum $n-3$, et ſic porro. Conf. n. 70, et 71.

111. *Probl. Inueſtigare, an radix aliqua aequationis propoſitae ſit multiplex, an ſolitaria.*

Reſol. E data aequatione deriuentur aequationes P, Q, R etc. (101), ac in ſingulis pro incognita x ſubſtituatur valor eius radicis, de qua eſt quaeſtio: ſi facta hac ſubſtitutione aequatio P non euaneſcat, ſeu non fiat $=0$, radix illa non eſt communis aequationi P, et datae, ac proinde non eſt multiplex, ſed ſolitaria (110): ſi euaneſcat P, ſeu ſi computando etiam datam ipſam aequationem A, quae ſemper euaneſcit, euaneſcant duae A et P, at non reliquae Q, R, S etc. radix erit duplex; ſi euaneſcant tres A, P, Q, radix erit triplex; et generatim totuplex erit, quot fuerint aequationes A, P, Q, R etc. euaneſcentes (110).

E. g. Quaeratur an aequationis $x^5-5x^4-9x^3+53x^2+8x-48=0$ radix 1 ſit multiplex, an ſolitaria. Deriuetur ex eadem aequatio $P=5x^4-20x^3-27x^2+106x+8$, in qua pro x ponendo 1 fiet ſumma $=72$: quare 1 eſt radix ſolitaria. At ſi altera radix datae aequationis 4 ponatur pro x, euaneſcet etiam aequatio P, non autem euaneſcent reliquae Q, R etc. quare radix 4 eſt duplex.

Quaeratur item an aequationis $A=x^5-13x^4+48x^3+32x^2-512x+768=0$ radix 4 ſit multiplex, an ſolitaria. Factis de more deriuationibus erit

$$A=x^5-13x^4+48x^3+32x^2-512x+768$$
$$P=5x^4-52x^3+144x^2+64x-512$$
$$Q=10x^3-78x^2+144x+32$$
$$R=10x^2-52x+48$$

Iam in ſingulis ponendo 4 pro x euaneſcent omnes quatuor aequationes A, P, Q, R, at non euaneſcet $S=5x-13$: quare ra-

dix 4 eſt quadruplex, ſeu quatuor ſunt aequationis propoſitae radices aequales 4.

112. *Probl. Inueſtigare, vtrum aequatio propoſita habeat aliquod maximum, vel minimum; ſeu an radices aequationis deriuatae P exhibeant aliquod maximum, vel minimum.*

Reſol. Aequatio deriuata P ponatur = 0, et iuxta inferius dicenda inueniantur eiuſdem radices: quaeuis radix inuenta exhibebit aliquod maximum, vel minimum 1) ſi ſolitaria fuerit, 2), ſi earum aequalium numerum imparem habuerit aequatio P, ſeu quod idem eſt, ſi aequationum deriuatarum euaneſcentium numerus impar fuerit: ſi vero par fuerit, nullum maximum, vel minimum exhibebit.

Demonſtr. Poſito enim pro incognita x valore quouis vtcunque parum diſtante ab eo, cui reſpondet maximum vel minimum (nam ſi pro x poneretur ille ipſe valor reſpondens maximo, vel minimo, fieret $P=0$, cum valor ille ſit radix aequationis $P=0$) non erit $P=0$, adeoque differentiale aequationis erit proxime Pdx (102), eritque poſitiuum, vel negatiuum, prout valor P fuerit poſitiuus, vel negatiuus: quare ſi in adpulſu incognitae x ad radicem quampiam aequationis $P=0$ mutat P ſignum, etiam differentiale aequationis mutabit ibi ſignum, et incrementum abibit in decrementum, aut contra, ſeu habebitur aliquod maximum, vel minimum; atqui P tranſibit per nihilum, et mutabit ſignum, ſi radix eiuſdem, ad quam adpellit x, fuerit ſolitaria, aut ſi radicum aequalium numerus fuerit impar, non tranſibit autem, ſed retento ſigno regredietur e nihilo, ſi numerus idem fuerit par (96): ergo in caſu primo habebitur aliquod maximum, vel minimum, in ſecundo non habebitur.

Exempla.

I. Si ex aequatione $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128 = 0$ deriuetur aequatio $P = 4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 0$, erunt

radices huius deriuatae 2, 4, 6, quarum quaelibet est solitaria, seu nulla est communis aequationi propositae: quare omnes exhibent aliquod maximum, vel minimum, vt vidimus n. 106. Quod si radices illae tres aequationis $P=0$ seorsim innotuissent, adhuc facile definiretur, an exhibeant aliquod maximum, vel minimum; nam deriuando secundum aequationem $Q=6x^2-48x+88$, ea non euanesceret, quaecunque trium illarum radicum poneretur pro x: quare cum vnica tantum aequatio P euanesceret in singulis radicibus, quaeuis earum exhibet aliquod maximum, vel minimum.

II. Si ex aequatione $x^5-10x^4+30x^3-40x^2+25x-2=0$ deriuetur aequatio $P=5x^4-40x^3+90x^2-80x+25=0$, seu $x^4-8x^3+18x^2-16x+5=0$, eius radices erunt 1, 1, 1, 5, adeoque vtraque radix 1 et 5 exhibebit aliquod maximum, vel minimum. Fingamus autem vnicam radicem 1 seorsim innotescere, vt adpareat, an ea exhibeat aliquod maximum vel minimum, deriuentur complures aequationes P, Q, R, S etc. in quibus omnibus pro x substituatur 1, euanescunt ex iis tres, nempe P, Q, R, vnde concluditur eidem respondere maximum aliquod, vel minimum. Similiter si sola radix 5 innotesceret, ea substituta sola aequatio P euanesceret; vnde rursus pateret ei respondere aliquod maximum, vel minimum.

III. Si ex aequatione $x^4-16x^3+72x^2-128x=0$ deriuetur aequatio $P=4x^3-48x^2+144x-128=0$, seu $x^3-12x^2+36x-32=0$, eius radices erunt 2, 2, 8, quarum prima cum sit duplex, nec maximum, nec minimum exhibet: at secunda 8 solitaria exhibet alterutrum, vt vidimus n. 107. Fingamus rursus alterutram duntaxat radicem 2 vel 8 innotescere: deriuentur complures aequationes P, Q, R etc. in his pro x substituendo 2, euanescent duae P et Q; at substituendo

8 euaneſcet ſola P: ergo numerus par euaneſcentium oſtendit radici 2 nullum maximum, vel minimum reſpondere; at numerus earundem impar oſtendit radici 8 alterutrum reſpondere.

113. *Probl. Inueſtigare, an radices aequationis deriuatae P exhibeant aliquod maximum, an aliquod minimum.*

Reſol. Aequationis deriuatae P=0 radix, de qua eſt quaeſtio, ſubſtituatur tam in aequatione data pro incognita x, quam in deriuatis P, Q, R etc. Si aequatio data euaneſcat, habebitur minimum illud=0, de quo n. 105. Sin autem valores aequationis propoſitae, et aequationis deriuatae, quae prima non euaneſcit, ex ea ſubſtitutione reſultantes habeant idem ſignum, radix illa exhibebit minimum; ſi ſigna contraria, exhibebit maximum.

Demonſtr. Dum enim P euadit=0, non autem Q=0, differentiale aequationis propoſitae eſt quam proxime Qdx^2: ſi vero fiat etiam Q=0, differentiale idem eſt $R\,dx^3$, et ſic porro (103), habetque ſemper idem ſignum, quod P, vel Q, vel R, etc. ac proinde ad valorem aequationis propoſitae ſemper accedit differentiale eiuſdem ſigni, quod habet valor aequationis deriuatae primo non euaneſcentis: ſi ergo hic valor idem habet ſignum cum valore datae aequationis, is ibi incipiet creſcere, ac proinde deuenerat ad aliquod minimum: ſi contrarium habet ſignum, incipiet decreſcere, adeoque deuenerat ad aliquod maximum: ſi demum regreditur a nihilo, deuenerat ad aliquod minimum, ſeu nihilum.

Exempla.

I. In exemplo primo ſuperiore poſito numero 2 pro incognita x valor aequationis propoſitae fit=—16; ac valor aequationis Q primo non euaneſcentis fit=16; quare ſigna contraria oſtendunt a radice illa 2 exhiberi maximum. Poſito 4 pro x

aequatio propoſita fit = 0, adeoque radix 4 exhibet minimum, ſeu nihilum. Poſito 6 pro x aequatio data fit = — 16, aequatio primo non euaneſcens Q fit = 16: hinc ſigna contraria denuo oſtendunt a radice 6 exhiberi maximum.

II. In exemplo ſecundo poſito 1 pro x aequatio data fit = 4, et aequatio deriuata primo non euaneſcens S fit = — 5: quare contraria ſigna oſtendunt a radice 1 exhiberi maximum. Similiter poſito 5 pro x aequatio data fit = — 252, et aequatio deriuata primo non euaneſcens Q fit = 160: rurſus ergo ſigna contraria oſtendunt a radice 5 exhiberi maximum.

III. In exemplo tertio poſito 8 pro x aequatio data fit = — 512, et aequatio deriuata primo non euaneſcens Q fit = 72: quare ſigna contraria oſtendunt a radice 8 exhiberi maximum. Idem eodem modo definitur in quibusuis aliis exemplis.

Scholion. Quae de valoribus aequationum maximis, et minimis hoc capite dicta ſunt, non ſolum magnopere faciunt ad naturam aequationum intimius peruidendam; ſed etiam mirum in modum illuſtrant ea, quae in calculo differentiali de maximis, et minimis tradidimus.

SECTIO II.

De Resolutionibus Arithmeticis Aequationum compositarum.

CAPVT I.

De inueniendis aequationibus rationalibus, per quas aequatio data ad gradum inferiorem deprimi possit.

114. Siqua aequatio radicem aliquam habeat rationalem, ea erit exacte diuisibilis per aequationem simplicem huius formae $x \pm a$, vbi x denotat incognitam aequationis, et a radicem eiusdem rationalem (21): quare inuentis huiusmodi aequationibus simplicibus, e quibus data aequatio composita est, radices earundem rationales innotescere perspicuum est. Hunc porro in finem sequentia addimus problemata.

115. *Probl. Dati numeri diuisores omnes inuenire.*

Resol. Sit datus quiuis numerus e. g. 120: ducta a dextris eiusdem linea recta verticali, scribatur e regione 1 tanquam primus diuisor; deinde tentetur diuisio per 2, quae cum succedat, scribatur quotus 60 infra 120, et diuisor 2 e regione eiusdem infra 1. Tentetur iterum diuisio per 2, scribaturque quotus 30 infra 60, et e regione diuisor 2 infra 2, qui ducatur in priorem diuisorem 2, et factum 4 scribatur post 2, erit etiam 4 diuisor numeri dati 120; si enim 120 diuidi potest per 2, ac eius dimidium 60 iterum per 2, vtique totus numerus diuidi poterit per 4.

120	1
60	2
30	2, 4
15	2, 8
5	3, 6, 12, 24
1	5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120.

Rurſus 30 diuidatur per 2, et quotus 15 ſcribatur infra 30, ac e regione eiuſdem diuiſor 2, qui ducendus eſſet in praecedentes diuiſores 2 et 4; ſed quia factum 4 ſcriptum iam ante fuit inter diuiſores, idcirco duci tantum debet in 4, et factum 8 ſcribi poſt 2. Quia vero vltimus quotus 15 nequit iam per 2 diuidi, tentetur diuiſio eiuſdem per 3, et quotus 5 ſcribatur infra 15, ac e regione eiuſdem diuiſor 3, qui ductus in priores diuiſores generat producta 6, 12, 24 ſcribenda poſt 3. Quia denique vltimus quotus 5 nonniſi per 5 eſt diuiſibilis, ſcribatur quotus 1 infra 5, ac e regione eiuſdem diuiſor 5, qui ductus in diuiſores praecedentes 2, 3, 4, 6, 12, 24 generat producta 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120 ſcribenda poſt 5. Numeri omnes a dextris lineae ſcripti incipiendo ab 1 vſque ad 120 erunt diuiſores numeri dati. Eodem modo erit procedendum cum quouis alio numero propoſito.

116. *Probl. Datorum duorum numerorum diuiſorem communem maximum inuenire.*

Reſol. Diuidatur maior numerus per minorem: ſi ſuccedat exacte diuiſio, minor ille erit maximus communis diuiſor. Si quod autem reſiduum reſtet e priori diuiſione, per hoc diuidatur denuo prior diuiſor, atque ita deinceps per reſiduum cuiuſuis diuiſionis diuidatur ſemper praecedens diuiſor, donec aliqua diuiſio abſque vllo reſiduo obtineatur: diuiſor poſtremae huius diuiſionis erit diuiſor communis maximus datorum numerorum.

Demonſtr. Sint numeri dati a et b: ſi numerus b contineatur in a vicibus m, et remaneat reſiduum c, omnis numerus x metiens numeros a et b, etiam metietur reſiduum c. Erit enim $a=bm+c$, et hinc $a-bm=c$; atqui ex hypotheſi x metitur a, et b, adeoque etiam huius multiplum bm: ergo x metitur $a-bm$, ſeu reſiduum c. Porro primum hoc reſiduum c contineatur in b vicibus n, ac remaneat ſecundum reſiduum d, numerus ille x etiam metietur d: erit enim $b=cn+d$, et hinc $b-cn=d$, et ex hypotheſi x metitur b, ac ex demonſtratis metitur etiam c, adeoque et eiuſdem multiplum cn, et hinc totum numerum $b-cn$, ſeu reſiduum ſecundum d, et ſic porro.

Quare poſt quotcunque diuiſiones numerus ille x metietur reſiduum vltimum, et ſiquidem hoc vltimum reſiduum exacte diuidat praecedens, erit iſtud menſura communis numerorum a et b. Sit enim reſiduum iſtud vltimum d metiens reſiduum c vicibus r, erit $c=rd$; eſt vero $a=bm+c$, et $b=cn+d$: cum ergo d metiatur c, metietur etiam $cn+d$ ſeu b, et hoc ipſo etiam $bm+c$ ſeu a: ergo d eſt menſura communis numerorum a et b; eſſe autem maximam menſuram patet: nam ex demonſtratis omnis menſura communis x numerorum a et b debet metiri etiam reſiduum d; atqui maximus numerus metiens numerum d eſt ipſe d; ergo d eſt maxima communis menſura numerorum a et b.

E. g. Quaeratur maximus communis diuiſor numerorum 637 et 143. Diuidatur prior per poſteriorem, manebit reſiduum primum 65. Diuidatur rurſus prior diuiſor 143 per hoc reſiduum, erit reſiduum ſecundum 13. Diuidatur iterum prior diuiſor 65 per hoc reſiduum, erit reſiduum nullum: ergo datorum numerorum maximus communis diuiſor eſt 13.

117. *Coroll.* 1. Si communis diuiſor maximus plurium numerorum quaeratur, primum quaeratur diuiſor maximus duorum,

vt ſupra; tum communis diuiſor maximus diuiſoris huius inuenti, et numeri tertii dati; deinde diuiſor noui diuiſoris inuenti, ac numeri quarti dati, et ſic porro.

118. *Coroll.* 2. Si inter diuiſiones ad nullum deueniatur reſiduum, per quod praecedens diuiſor exacte diuidi poſſit, indicio eſt numeros propoſitos nullam habere communem menſuram, praeter vnitatem, adeoque eſſe *inter ſe primos*, vt vocant, quales ſunt numeri 13 et 23.

119. *Probl. Inuenire aequationes ſimplices huius formae* $x \pm a = 0$, *per quas data aequatio diuidi, ſeu ad gradum inferiorem* x *deprimi poſſit.*

Reſol. Cum terminus vltimus aequationis ſit factum ex omnibus eiuſdem radicibus ſigno contrario acceptis (26), perſpicuum eſt, radices rationales omnes, ſiquas data aequatio habeat, contineri inter diuiſores termini vltimi. Quare quaerendi ſunt omnes diuiſores termini vltimi (115); tum ex iis tam poſitiue, quam negatiue ſumtis, ac ex incognita, quam aequatio continet, formandae aequationes ſimplices huius formae $x + a = 0$, vel $x - a = 0$, ac per has tentanda aequationis propoſitae diuiſio, quae ſi ſuccedat, patet aequationem propoſitam coaluiſſe ex iis ſimplicibus, per quas exacte diuidi poteſt; ac proinde eos valores a, quos in iis habet incognita, eſſe radices rationales aequationis propoſitae (22).

E. g. Quaerantur diuiſores ſimplices, ſeu radices rationales aequationis $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$: erunt termini vltimi diuiſores 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; quare tentari debet diuiſio per aequationes ſimplices $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 3$ etc. quae cum exacte ſuccedat per $x - 2$, per $x + 3$, et per $x - 4$, patet aequationis propoſitae radices eſſe $2, -3, 4$, vti adparebit ſubſtituenti.

120. *Coroll.* 1. In tentandis hiſce diuiſionibus multum contrahitur labor, ſi 1) transformetur aequatio in aliam, in qua terminus vltimus pauciores habeat diuiſores (57). 2) Si determinentur limites, inter quos radices continentur (79. et ſeq.) 3) Si e ſignorum alternatione, vel continuatione diiudicetur, an radices poſitiuae, an negatiuae ſint (29. 4) Si, dum radices omnes poſitiuae, vel dum omnes negatiuae ſunt, reiiciantur diuiſores coefficientem termini ſecundi excedentes (26).

E. g. In aequatione $x^3 - 9x^2 + 22x - 8 = 0$ ſignorum diſpoſitio oſtendit omnes radices eſſe poſitiuas, quare per ſolos diuiſores poſitiuos numeri 8 tentanda erit diuiſio, ſeu per ſolas aequationes ſimplices $x-1, x-2, x-4, x-8$, ſucceditque diuiſio per $x-4$, adeoque 4 eſt radix aequationis propoſitae.

121. *Coroll.* 2. Inuenta vna radice reliquae facilius inuenientur, ſi aequatio per aequationem ſimplicem ex inuenta radice compoſitam diuiſa vno gradu deprimatur: nam aequatio gradus inferioris inde emergens continebit reliquas radices.

E. g. Si detur aequatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, diuiſio eiuſdem ſuccedit per $x-2$, eſtque 2 vna ex illius radicibus. Peracta diuiſione reducitur ad $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$, cuius diuiſio ſuccedit per $x-3$, ac proinde vna eius radix eſt 3, ac ex ſecunda hac diuiſione naſcitur aequatio $x^2 + x - 20 = 0$, quae diuiſa per $x-4$ abit in $x+5=0$, et hinc radices eiuſdem ſunt 4 et -5: quare propoſitae aequationis radices ſunt 2, 3, 4, -5.

122. *Coroll.* 3. Si nequeat propoſita aequatio diuidi per vllam aequationem ſimplicem compoſitam ex incognita, et ex diuiſoribus termini vltimi tam poſitiue, quam negatiue acceptis, indicio eſt eam non habere radicem vllam rationalem.

123. *Coroll.* 4. Possunt radices rationales erui etiam sine diuisione, substituendo scilicet successiue pro incognita diuisores termini vltimi tam positiue, quam negatiue acceptos: quicunque enim eorum verificabunt, seu in nihilum redigent aequationem, ii erunt radices eiusdem (9).

E. g. Si in aequatione $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ e diuisoribus termini vltimi pro x substituantur $1, 1, 3$, aequationis valor semper erit $= 0$: ergo diuisores hi sunt eiusdem radices.

Scholion. Verum omnis haec methodus satis operosa est, taedii quidem plena certe, si terminus vltimus aequationis multos admittat diuisores. Quare iuuat hoc loco adiungere problema, cuius ope e compluribus termini vltimi diuisoribus determinentur ii, qui cum incognita forment aequationes simplices, per quas aequatio proposita exacte diuidi possit.

124. *Probl. Determinare diuisores termini vltimi, qui cum incognita forment aequationes simplices, per quas aequatio proposita exacte diuidi possit.*

Resol. In proposita aequatione substituantur pro incognita successiue termini progressionis arithmeticae $1, 0, -1$ etc. notenturque e regione in columna secunda valores aequationis inde obuenientes, e quorum regione in columna tertia scribantur omnes eorundem diuisores. Inter diuisores respondentes diuersis illis positionibus tam positiue, quam negatiue sumtos, quaeratur aliqua progressio arithmetica, cuius singuli termini sumti inter diuisores singulis positionibus respondentes vnitate decrescant, scribaturque ea progressio in columna quarta: terminus huius progressionis respondens positioni $x = 0$ sumatur pro a, et per $x + a$ tentetur diuisio, quae si non succedat per vllum terminum a hoc pacto inuentum, impossibilis erit huius formae diuisor, qui si possibilis sit, hac methodo semper inuenietur.

Demonſtr. Sit diuiſor quaeſitus $x+a$, in quo ſi pro x numerus quiscunque ſubſtituatur, numerus ille, in quem tunc abit $x+a$, erit neceſſario diuiſor valoris, quem acquirit propoſita aequatio, ſi in ea quoque pro x idem numerus ſubſtituatur: quare ſi in propoſita aequatione fiat ſucceſſiue $x=1$, $x=0$, $x=-1$ etc. et quaerantur diuiſores omnes valorum ex his poſitionibus obuenientium, euidens eſt. 1) Inter diuiſores valoris e poſitione $x=1$ obuenientis ad fore $1+a$. 2) Inter diuiſores valoris e poſitione $x=0$ obuenientis ad fore $0+a$, ſeu a. 3) Inter diuiſores valoris e poſitione $x=-1$ obuenientis ad fore $-1+a$. Atqui $1+a, a, -1+a$ ſunt in progreſſione arithmetica, cuius termini vnitate decreſcunt: ergo inter diuiſores valoris e poſitione $x=0$ obuenientis, qui eſt ipſe terminus vltimus aequationis, nullus poteſt eſſe quaeſitus a, quin vnitate excedatur ab aliquo diuiſore valoris obuenientis e poſitione $x=1$, et quin vnitate excedat aliquem diuiſorem valoris obuenientis e poſitione $x=-1$: quare ii tantum diuiſores termini vltimi, ſeu valoris e poſitione $x=0$ obuenientis aſſumendi ſunt pro a ad formandam aequationem ſimplicem $x+a$, qui ſunt in progreſſione arithmetica per vnitatem decreſcente.

125. *Coroll.* Si e poſitione $x=0$ plures obueniant diuiſores dictam conditionem habentes, ac definiendum ſit, quiſnam eorum pro a aſſumi debeat, continuentur poſitiones, fiatque $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ etc. vel $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$ etc. et diſpiciatur, an per aliquem diuiſorem valorum e nouis his poſitionibus obuenientium progreſſiones iam inuentae continuentur: ſiqua progreſſio iam ante inuenta per nullum diuiſorem nouarum harum poſitionum continuetur, ea repudianda; ſiqua continuetur, ea adhibenda erit, vti elucebit in exemplis ſequentibus.

Exempla.

I. Quaeratur diuiſor aequationis $x^3 - x^2 - 10x + 6 = 0$. Scribantur in columna prima poſitiones $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$: in ſecunda valores aequationis inde obuenientes -4, 6, 14: in tertia horum valorum diuiſores omnes hoc pacto

$x = 1$	-4	1, 2, 4	4
$x = 0$	6	1, 2, 3, 6	3
$x = -1$	14	1, 2, 7, 14	2

In his diuiſoribus vnica occurrit progreſſio 4, 3, 2 ſcribenda in columna quarta, cuius primus terminus 4 reſpondet primae poſitioni $x = 1$; ſecundus 3 reſpondet ſecundae poſitioni $x = 0$, tertius 2 reſpondet tertiae poſitioni $x = -1$: quare pro a ſumendus eſt numerus 3 reſpondens poſitioni $x = 0$, ac tentanda diuiſio per $x + 3$, quae cum ſuccedat, peracta diuiſione aequatio deprimetur ad hanc ſecundi gradus $x^2 - 4x + 2 = 0$, quae nullam habet radicem rationalem, vti patebit eandem operationem repetenti.

II. Quaeratur diuiſor aequationis $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$. Scribantur in columna prima, eaedem poſitiones, quae ſupra; in ſecunda valores aequationis inde reſultantes; in tertia earundem diuiſores omnes hoc pacto

$x = 1$	-8	1, 2, 4, 8,	-2 4
$x = 0$	6	1, 2, 3, 6	-3 3
$x = -1$	16	1, 2, 4, 8, 16	-4 2
$x = -2$	16	1, 2, 4, 8, 16	1

Occurrent inter diuiſores binae progreſſiones per vnitatem decreſcentes -2, -3, -4, et 4, 3, 2 ſcribendae in columna quar-

ta. Tentanda ergo erit diuiſio per aequationes $x-3$, vel $x+3$; aut vt illico adpareat, vtrius progreſſionis terminus medius pro a aſſumendus ſit, facienda noua ſuppoſitio $x=-2$, vnde obuenit valor aequationis 16, inter cuius diuiſores cum non ſit -5, nequit prior progreſſio per eius diuiſores continuari, adeoque reiicienda eſt: at altera 4, 3, 2, 1 continuatur; hinc pro a ponendo 3 tentanda tantum erit diuiſio per $x+3$, quae ſuccedit, ac per eam deprimitur aequatio ad $x^4-5x+2=0$, quae caret radice rationali, vti patebit eandem operationem repetenti.

III. Quaeratur diuiſor aequationis $x^5-12x^4+5x^3-61x^2+22x-120=0$. Inſcribantur tres columnae, vt in exemplis ſuperioribus

$x=1$	-165	1, 3, 5, 11, 15, 33, 53, 165	3 -11
$x=0$	-120	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120	2 -12
$x=-1$	-221	1, 13, 17, 221	1 -13

Habebuntur inter diuiſores duae progreſſiones per vnitatem decreſcentes 3, 2, 1, et -11, -12, -13 ſcribendae in columna quarta, quarum primam reiici debere illico adparet: facta enim noua poſitione $x=-2$, inter diuiſores valoris inde obuenientis deberet haberi terminus 0, vt prima progreſſio per eum continuari poſſit, quod abſurdum eſt: quare retenta ſecunda diuiſor erit $x-12$, per quem facta diuiſione deprimitur aequatio ad $x^4+5x^3-x+10=0$ carentem radice rationali, vt patebit repetenti eandem operationem.

IV. Quaeratur diuiſor aequationis $x^3-3x^2-46x-72=0$. Peractis omnibus vt hactenus

$x=2$

$x=2$	-168	1, 2, 4, 3, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168	-7	4	-6	
$x=1$	-120	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120	-8	3	4	5
$x=0$	-72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 — — — —	-9	2	3	4
$x=-1$	-30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 — — — — — — —	-10	1	2	3

Occurrent inter diuiſores quatuor progreſſiones arithmeticae per vnitatem decreſcentes, ac ſcriptae in columna quarta: quare tentanda erit diuiſio aequationis per aequationes ſimplices $x-9$, $x+2$, $x+3$, $x+4$; aut ponenda noua poſitio $x=-2$, quo caſu valor aequationis fit $=0$, adeoque vnus eius diuiſor erit $x+2$: at de reliquis tribus progreſſionibus ex ea poſitione nihil poteſt erui. Fiat ergo $x=2$; per diuiſores huic poſitioni reſpondentes penultima progreſſio non continuabitur, quae proinde reiici debet; continuabuntur autem reliquae: quare duo alii diuiſores aequationis propoſitae ſunt $x-9$, et $x+4$.

V. Quaeratur diuiſor aequationis $x^6-4x^5+3x^4-12x^3-5x^2+11x+36=0$. Inſcriptis de more tribus columnis

$x=2$	-74	1, 2, 37, 74 — — — — —	—	-1,	-2,	—
$x=1$	30	1, 2, 3, 5, 10, 15, 30 — —	3,	-2,	-3,	10,
$x=0$	36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	2,	-3,	-4,	9,
$x=-1$	40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 —	1,	-4,	-5,	8

Occurrunt in diuiſoribus reſpondentibus tribus conſuetis poſitionibus quatuor progreſſiones ſcriptae in columna quarta, quarum duae mediae continuantur etiam per diuiſores nouae poſitioni $x=2$ reſpondentes, adeoque eae ſolae retinendae ſunt. Quod ſi inter has ipſas ſtatuendum ſit, vtra adhiberi debeat, fiat noua poſitio $x=3$; iam vt per diuiſores huic poſitioni reſpondentes continuari poſſit progreſſio $-1, -2, -3, -4$, deberet inter eos contineri terminus 0, quod abſurdum eſt; quare patet hac

progreſſione reiecta alteram eſſe adhibendam, foreque diuiſorem $x-4$, per quem diuiſa aequatio reducitur ad $x^5+3x^3-5x-9=0$, quae caret radice rationali.

126. *Probl. Inuenire aequationes duarum dimenſionum huius formae* $x^2+ax+b=0$, *per quas data aequatio accurate diuidi, ſeu ad gradum inferiorem deprimi poſſit.*

Reſol. Exhibeat formula x^2+ax+b diuiſorem quaeſitum; poſito $x=0$ eius valor reducetur ad b, qui erit diuiſor termini vltimi, ſeu valoris aequationis e poſitione $x=0$ obuenientis. Similiter ſi in hoc diuiſore fiat $x=1$, erit $1+a+b$ diuiſor valoris aequationis e poſitione $x=1$ obuenientis. Denique ſi in eodem diuiſore fiat $x=-1$, erit $+1-a+b$ diuiſor valoris aequationis e poſitione $x=-1$ obuenientis. Si ergo quaerantur omnes diuiſores valorum ex his poſitionibus obuenientium, ac ex iiſdem tam poſitiue, quam negatiue ſumtis reſecetur 1, comparebunt inter hos diuiſores vnitate multatos termini $a+b$, b, $-a+b$, qui ſunt in progreſſione arithmetica creſcente, vel decreſcente, prout a quantitas negatiua, vel poſitiua eſt: quare ſi reſecta vnitate e diuiſoribus illis inueniatur in iiſdem progreſſio aliqua arithmetica, terminus eiuſdem medius reſpondens poſitioni $x=0$ erit $=b$, quo ablato ex $a+b$ reſpondente in eadem progreſſione poſitioni $x=1$, reperietur a: hinc ſi inuenti valores a et b ſubſtituantur in formula x^2+ax+b, habebitur diuiſor quaeſitus.

127. *Coroll.* Si plures occurrant progreſſiones arithmeticae, facile determinabitur, quaenam earum ſit adhibenda: ſi enim fiant nouae poſitiones $x=-2$, $x=-3$ etc. erunt $4-2a+b$, $9-3a+b$ etc. diuiſores valorum aequationis hiſce nouis poſitionibus reſpondentium: ſi ergo e diuiſoribus horum valorum tam poſitiue, quam negatiue ſumtis reſecetur 4, vel 9 etc. reſtabunt termini $-2a+b$, $-3a+b$ etc. per quos prior progreſſio

$a+b, b, -a+b$ continuabitur. Eodem modo patet progreſſionem eandem continuatum iri, ſi fiant poſitiones $x=2$, $x=3$ etc. Quare ex inuentis progreſſionibus ea tantum erit adhibenda, quae per diuiſores nouis his poſitionibus reſpondentes continuatur, vt in problemate ſuperiore.

Exempla.

Quaeratur diuiſor duarum dimenſionum aequationis $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x - 6 = 0$. Inſcribantur tres primae columnae vt in problemate praecedente: in quarta ponantur quadrata columnae primae; columna quinta formetur hac lege 1) vt prima eiuſdem ſeries 0, 1, 3 etc. formetur reſecando vnitatem e diuiſoribus primae poſitioni $x=1$ reſpondentibus tam poſitiue, quam negatiue ſumtis; 2) vt ſecunda eiuſdem ſeries 1, 2, 3 etc. formetur e diuiſoribus ſecundae poſitioni $x=0$ reſpondentibus tam poſitiue, quam negatiue ſumtis; 3) vt tertia eiuſdem ſeries 0, 1. 2 etc. formetur reſecando vnitatem e diuiſoribus tertiae poſitioni $x=-1$ reſpondentibus tam poſitiue, quam negatiue ſumtis.

$x=1$	−8	1,2,4,8	1	0,1,2,7,−2,−3,−5,−9 − − − − − — — —	−5,1,7,−2
$x=0$	−6	1,2,3,6	0	1,2,3,6,−1,−2,−3,−6 − − − − − — — —	−1,3,6,−1
$x=-1$	12	1,2,3,4,6,12,	1	0,1,2,3,5,11,−2,−3,−4,−5,−7,−13 − − − −	1,5,5,0,
$x=-2$	88	1,2,4,8,11,22,44,88	4	0,4,7,18,40,84,-2,-3,-5,-6,-8,-12,-15,-26,-48,-92	4,7,4—

Iam in ſeriebus columnae quintae occurrunt progreſſiones arithmeticae ſcriptae in columna ſexta, e quibus reiiciendam eſſe poſteriorem patet facta noua poſitione $x=-2$: ſi enim valoris inde obuenientis 88 diuiſores omnes ſcribantur in columna tertia, et quadratum 4 poſitionis — 2 in columna quarta: deinde tollatur 4 e diuiſoribus columnae tertiae tam poſitiue, quam negatiue ſum-

tis, et inde formetur columna quinta 0, 4, 7, 18 etc. per huius terminos non continuabitur progreſſio illa vltima —2, —1, 0, quae proinde reiicienda eſt. Eodem modo pateret factis pluribus poſitionibus etiam reiiciendam eſſe tertiam 7, 6, 5, 4: quare duabus primis retentis erit ex prima $b=-2$, ex ſecunda $b=3$, et hinc e prima $a+b=-5$, e ſecunda $a+b=1$: quare ſubtracto b erit $a=-3$, vel $a=-2$. Si ergo in formula x^2+ax+b pro a et b hi valores ſubſtituantur, erunt diuiſores quaeſiti x^2-3x-2, et x^2-2x+3, per quorum vnum ſi diuidatur aequatio propoſita, alter erit quotus. Quare ſi radices horum diuiſorum datam aequationem componentium inueniantur, habebuntur radices aequationis datae (22).

II. Quaeratur diuiſor duarum dimenſionum aequationis $x^4+6x^3+11x^2+10x+5=0$. Factis vt ante conſuetis tribus poſitionibus inſcribantur columnae quinque

$x=1$	33	1, 3, 11, 33	1	0, 2, 10, 32, −2, −4 −12, −34	10,	2,
$x=0$	5	1, 5	0	1, 5, −1, −5, − − − − − −	5,	1,
$x=-1$	1	1	1	0, −2 − − − − − − − −	0	0

In ſeriebus columnae quintae occurrent duae progreſſiones arithmeticae ſcriptae in columna ſexta: cumque aequatio propoſita ſit quarti gradus, ſi habet vnum diuiſorem duarum dimenſionum, habebit et alterum (21): quare vtraque progreſſio adhiberi poteſt. Erit ergo ex prima $b=5$, et hinc $a+b=10$, adeoque $a=10-5=5$: ex ſecunda $b=1$, et hinc $a+b=2$, adeoque $a=1$: quibus valoribus in formula x^2+ax+b ſubſtitutis habebuntur diuiſores quaeſiti x^2+5x+5, et x^2+x+1, per quorum alterum ſi diuidatur aequatio propoſita, alter erit quotus; ac ſi horum diuiſorum radices inueniantur, habebuntur radices aequationis propoſitae (22).

III. Quaeratur diuisor duarum dimensionum aequationis $x^5+3x^4+2x^3+8x^2-36x+21=0$. Factis positionibus consuetis inscribantur more consueto columnae quinque

$x=1$	-1	1, — — — —	1	0, -2, — — — — — — — — —	$-2,-2,0,0,0,$
$x=0$	21	1, 3, 7, 21, — —	0	1, 3, 7, 21, $-1,-3,-7,-21$ — — — —	$-1,1,-7,-3,-1$
$x=-1$	65	1, 5, 13, 65, — —	1	0, 4, 12, 64, $-2,-6,-14,-66$ — — —	$0,4,-14,-6,-2$
$x=-2$	125	1, 5, 25, 125, —	4	1, 21, 121, $-3,-5,-9,-29-129$ — —	1 — — — $9,-3$
$x=-3$	147	1, 3, 7, 21, 49, 147,	9	12, 40, 138, $-2,-6,-8,-10,-12,-16,-30,-58,-156$	— — — — $12,-$

Iam in tribus primis seriebus columnae quintae occurrunt quinque progressiones arithmeticae positae in columna sexta, e quibus facta noua positione $x=-2$ patet per huius positionis columnam quintam solum tres continuari, nimirum primam, quartam, et quintam, quae proinde solae retinendae sunt. Vt autem adpareat, quaenam ex his ipsis sit adhibenda, fiat rursus noua positio $x=-3$, erit valor aequationis scriptus in columna secunda 147, cuius diuisores omnes ponantur in columna tertia, e quibus tam positiue, quam negatiue sumtis tollendo 9, seu quadratum positionis -3 scriptum in columna quarta, formetur columna quinta, per cuius terminos sola progressio quarta nimirum $0, -3, -6, -9, -12$ continuatur: quare terminus eiusdem positioni $x=0$ respondens -3 est $=b$, et praecedens $0=a+b$, vnde $a=-b=3$. His ergo valoribus in formula x^2+ax+b substitutis erit diuisor quaesitus x^2+3x-3, et quotus inde euanescens $x^3+5x-7=0$ carens diuisore duarum dimensionum.

Scholion. Dum aequatio proposita gradum quintum non excedit, ope horum duorum problematum semper possunt inueniri diuisores eiusdem rationales, siquos habet: si enim id genus aequatio non habeat diuisorem vnius, aut duarum dimensionum, nec habebit trium, aut quatuor (21). At si aequatio assurgat ad

gradus altiores, fieri potest, vt tametsi non habeat diuisores vnius aut duarum dimensionum, habeat tamen dimensionum altiorum, quorum inuentio iisdem quidem principiis nititur, sed ob calculi prolixitatem a nobis praetermittitur.

CAPVT II.

De Resolutionibus Aequationum secundi gradus.

128. *Probl. Resoluere aequationes secundi gradus termino secundo carentes.*

Resol. Quaelibet eiusmodi aequatio repraesentatur per $x^2 + q = 0$; hinc vero habetur $x^2 = -q$, et $x = \pm\sqrt{-q}$: vbi patet semper haberi binas radices, vnam positiuam, alteram negatiuam, cum vtraque idem quadratum x^2 gignat; et ambas quidem reales, si valor q in aequatione proposita fuerit negatiuus; ambas vero imaginarias, si fuerit positiuus.

129. *Probl. Resoluere aequationes secundi gradus termino tertio carentes.*

Resol. Quaelibet eiusmodi aequatio reuocatur ad hanc formulam $x^2 + px = 0$, cuius vna radix est $x = 0$ (34), per quam facta diuisione reducitur ad vnicam dimensionem $x + p = 0$, cuius radix est $x = -p$.

130. *Probl. Resoluere aequationes secundi gradus nullo termino carentes.*

Resol. Omnes id genus aequationes reuocari possunt ad hanc formulam $x^2 + px + q = 0$, ac soluuntur imprimis transponendo terminum vltimum, vt sit $x^2 + px = -q$; tum complendo quadratum, seu vtrinque addendo quadratum dimidii coefficientis termini secundi $\frac{1}{4}p^2$, vt sit $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$; ac denique

vtrinque extrahendo radicem $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$, vnde $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$: vbi rurſus ob ſignorum + et — ambiguitatem patet duplicem haberi radicem, ſeu valorem incognitae x.

131. *Coroll.* 1. Si in propoſita aequatione terminus vltimus q fuerit negatiuus. in expreſſione radicis valor $-q$ erit poſitiuus, et hinc quantitas $\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$ ſemper erit realis, et maior quam $\frac{1}{2}p$: quare ſiue termini ſecundi coefficiens p fuerit poſitiuus, ſiue negatiuus, ſemper vna radix $-\frac{1}{2}p+\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$ erit poſitiua, altera $-\frac{1}{2}p-\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$ negatiua. Hinc quotieſcunque vltimus aequationis terminus q negatiuus fuerit, ſemper habebuntur duae radices reales, vna poſitiua, altera negatiua.

E. g. Si aequatio $x^2-6x-16=0$ comparetur cum formula generali, erit $p=-6$, $q=-16$, et hinc $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}=3\pm\sqrt{(9+16)}=3\pm5=8$ vel $=-2$.

132. *Coroll.* 2. Si fuerit $q=0$, erit $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2}$, vel $-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2}$; id eſt $-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p=0$, vel $-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}p=-p$; ſeu vna radicum erit $=0$, altera $=-p$, prorſus vt ſupra (129).

133. *Coroll.* 3. Si terminus vltimus q fuerit quidem poſitiuus, ſed minor quam $\frac{1}{4}p^2$, adhuc quantitas $\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$ realis erit, ſed minor, quam $\frac{1}{2}p$, adeoquae ambae radices reales erunt; et ambae quidem poſitiuae, ſi coefficiens termini ſecundi p negatiuus fuerit; ambae negatiuae, ſi coefficiens idem poſitiuus fuerit.

E. g. Si aequatio $x^2 - 6x + 5 = 0$ conferatur cum generali formula, erit $p = -6$, $q = 5$, vnde $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2 = 5$, vel $= 1$. At in aequatione $x^2 + 6x + 5 = 0$ foret $x = -3 \pm \sqrt{4} = -1$, vel $= -5$.

134. *Coroll.* 4. Si terminus vltimus q fuerit positiuus, et $= \frac{1}{4}p^2$, erit $\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)} = 0$, adeoque ambae radices erunt $= -\frac{1}{2}p$, seu inter se aequales.

E. g. Si aequatio $x^2 - 6x + 9 = 0$ conferatur cum formula generali, erit $p = -6$, $q = 9$; vnde $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)} = 3 \pm \sqrt{(9 - 9)} = 3$: quare vtraque radix est $= 3$.

135. *Coroll.* 5. Si terminus vltimus q fuerit positiuus, et maior quam $\frac{1}{4}p^2$, quantitas $\frac{1}{4}p^2 - q$ erit negatiua, adeoque $\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}$ erit quantitas imaginaria: quare ambae radices erunt imaginariae, et problema, vnde aequatio orta est, impossibile.

E. g. Si aequatio $x^2 - 6x + 10 = 0$ conferatur cum formula generali, erit $p = -6$, $q = 10$; vnde $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)} = 3 \pm \sqrt{(9 - 10)} = 3 \pm \sqrt{-1}$.

136. *Probl. Resoluere aequationes secundi gradus tollendo secundum earundem terminum.*

Resol. Quaeuis aequatio secundi gradus omnes habens terminos reuocari potest ad hanc formulam $x^2 + px + q = 0$, e qua vt tollatur secundus terminus fiat $y - \frac{1}{2}p = x$ (60), et pro x hic valor substituatur, erit $y^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$, vbi deest secundus termi-

nus,

nus, et $y=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$, cui si adiungatur $-\frac{1}{2}p$, habebitur $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$ prorsus vt supra (130).

137. *Probl. Resoluere aequationes altiorum graduum, quae ad aequationes secundi gradus reduci possunt.*

Resol. Omnes aequationes trium terminorum huius formae $x^{2m}+px^m+q=0$, vbi scilicet in termino tertio deest incognita, et in termino primo duplo maiorem habet exponentem quam in secundo, reduci possunt ad aequationes secundi gradus. Nam posito $x^m=y$, huiusmodi aequationes abeunt in $y^2+py+q=0$, vbi $y=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)}$ (130), adeoque $x=\sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\right)}$.

E. g. In aequatione $x^4-6x^2+1=0$ est $p=-6, q=1$, et hinc $x=\pm\sqrt{\left(3\pm\sqrt{(9-1)}\right)}=\pm\sqrt{(3\pm\sqrt{8})}$.

Scholion. E quantitatibus partim rationalibus, partim irrationalibus radix quadrata extrahi interdum potest, vt in exemplo superiore radix quadrata ex $3\pm\sqrt{8}$ est $=1\pm\sqrt{2}$. Quare vt discerni possit, an ex huiusmodi quantitatibus radix quadrata extrahi possit, et quomodo extrahi debeat, sequens problema adiungere visum est.

138. *Probl. E binomio partim rationali, partim irrationali huius formae* $m+\sqrt{n}$ *radicem quadratam extrahere.*

Resol. Sit radicis cuiusuis binomiae $x+y$ quadratum $x^2+2xy+y^2$, erit x^2+y^2 semper quantitas rationalis etiam dum x et y quantitatem radicalem continent, et $2xy$ erit pars radicalis: si ergo pars quadrati rationalis x^2+y^2 ponatur $=m$, et pars irrationalis $2xy=\sqrt{n}$, erit 1) $x^2+y^2=m$, 2) $2xy=\sqrt{n}$, et hinc $4x^2y^2=n$, ac $y^2=\frac{n}{4x^2}$, quo valore in prima aequatione substituto erit

$x^2 + \frac{a}{4x^2} = m$, seu $x^4 + \frac{1}{4}n = mx^2$, aut $x^4 - mx^2 + \frac{1}{4}n = 0$: quare complendo quadratum, et extrahendo radicem erit $x^2 = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}n\right)} = \frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n)}$, ac rurſus extrahendo radicem erit $x = \pm\sqrt{\left(\frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)}$.

Porro ex aequatione prima eſt $y^2 = m - x^2 = m - \frac{m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2} = \frac{2m - m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2} = \frac{m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}$, vnde $y = \pm\sqrt{\left(\frac{m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)}$: quare $x + y = \pm\sqrt{\left(\frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)}$, qui valores ſeorſim ſcripti reducuntur ad hos quatuor:

$$+\sqrt{\left(\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{m - \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)}$$
$$+\sqrt{\left(\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{m - \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)}$$
$$-\sqrt{\left(\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{m - \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)}$$
$$-\sqrt{\left(\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right)}$$

Nam reliquas quatuor combinationes cum hiſce congruere euidens eſt. Harum autem prima et quarta exhibent radicem binomii $m + \sqrt{n}$; ſecunda, ac tertia radicem binomii $m - \sqrt{n}$: eſtque quarta eadem cum prima negatiue ſumta, vti et tertia cum ſecunda.

Igitur in adplicatione ad exempla ſpecialia dati valores quantitatum m et n ſubſtituantur in his formulis: quandocunque binomium datum habet radicem quadratam extrahibilem, ſemper erit $m^2 - n$ perfectum quadratum, e quo extracta radice reducetur formula ad binos terminos radicales ſimplices, e quorum al-

terutra ſi radix extrahi queat, pars vna radicis inuentae erit rationalis, ſecus vtraque erit irrationalis. Termini autem radicis inuentae vel idem habebunt ſignum, vel contraria, prout termini propoſiti binomii fuerint cum eodem ſigno, vel contrario.

Exempla.

I. Quaeratur $\sqrt{(3+\sqrt{8})}$. Erit $m=3, n=8, m^2-n=9-8=1$: quibus valoribus ſubſtitutis erit $x+y=\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{1}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{1}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{4}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}=1+\sqrt{2}$. Eſt adeo radix quaeſita $=1+\sqrt{2}$, quae ſemel in ſe ducta reſtituit binomium propoſitum $3+\sqrt{8}$.

II. Quaeratur $\sqrt{(7+\sqrt{40.})}$ Erit $m=7, n=40$; hinc $m^2-n=49-40=9$: quibus valoribus ſubſtitutis erit $x+y=\sqrt{\left(\frac{7+\sqrt{9}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{7-\sqrt{9}}{2}\right)}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, quae eſt radix quaeſita, ac ſemel in ſe ducta reſtituit binomium propoſitum $7+\sqrt{40}$.

III. Quaeratur $\sqrt{(16-6\sqrt{7})}=\sqrt{(16-\sqrt{252})}$. Erit $m=16$, $n=252$; hinc $m^2-n=256-252=4$: quibus valoribus ſubſtitutis erit $x+y=\sqrt{\left(\frac{16+\sqrt{4}}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{16-\sqrt{4}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{18}{2}}-\sqrt{\frac{14}{2}}=3-\sqrt{7}$, cuius quadratum eſt $9-6\sqrt{7}+7=16-6\sqrt{7}$, quod eſt binomium propoſitum.

IV. Quaeratur $\sqrt{(19+8\sqrt{3})}=\sqrt{(19+\sqrt{192})}$. Erit $m=19$, $n=192$; vnde $m^2-n=361-192=169$: quibus valoribus ſubſtitutis erit $x+y=\sqrt{\left(\frac{19+\sqrt{169}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{19-\sqrt{169}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{19+13}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{19-13}{2}\right)}=4+\sqrt{3}$, quae eſt radix quaeſita.

V. Quaeratur $\sqrt{(27+10\sqrt{2})}=\sqrt{(27+\sqrt{200.})}$ Erit $m=27$, $n=200$, et hinc $m^2-n=729-200=529$: qui-

bus valoribus ſubſtitutis erit $x+y=\sqrt{\left(\frac{27+\sqrt{529}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{27-\sqrt{529}}{2}\right)}$ $=\sqrt{\left(\frac{27+23}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{27-23}{2}\right)}=5+\sqrt{2}$.

VI. Quaeratur $\sqrt{(5+\sqrt{8})}$. Erit $m=5$, $n=8$; hinc $m^2-n=25-8=17$, adeoque $\sqrt{(m^2-n)}=\sqrt{17}$: cum ergo ex 17 radix extrahi accurate nequeat, argumento eſt binomium propoſitum non habere radicem extrahibilem.

VII. Quaeratur $\sqrt{(1+4\sqrt{-3})}=\sqrt{(1+\sqrt{-48})}$. Erit $m=1$, $n=-48$, ac $m^2-n=1+48=49$: quibus valoribus ſubſtitutis erit $x+y=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{49}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{49}}{2}\right)}=2+\sqrt{-3}$.

Scholion. Si in binomio propoſito terminus ſub vinculo radicali poſitus ſit perfectum quadratum, hac methodo radix non innoteſcet. E. g. ſi quaeratur $\sqrt{(6+\sqrt{9})}$, erit $m=6$, $n=9$, $m^2-n=36-9=27$, vnde radix quadrata extrahi nequit, et tamen binomium propoſitum habet radicem 3. Nempe in hoc caſu e parte illa irrationali $\sqrt{9}$ prius extrahenda eſt radix 3, eritque $6+\sqrt{9}=9$, cuius radix $=3$.

CAPVT III.

De Reſolutionibus Aequationum tertii gradus.

139. Priuſquam adgrediamur ipſas aequationum tertii gradus reſolutiones, theoremata quaedam ſubiiciemus, in quibus earundem proprietates communes penitius explicabuntur; his autem rite perſpectis reſolutiones ipſae euadent multo faciliores.

140. *Theor. Aequatio tertii gradus poteſt habere vel omnes tres radices reales: vel vnam realem, et duas imaginarias.*

Demonſtr. Coaleſcit enim e binis aequationibus, vna ſecundi, altera primi gradus (21), quarum radices eaedem ſunt

cum eiuſdem radicibus (22): atqui radix aequationis primi gradus, cum nullum inuoluat ſignum radicale, ſemper eſt realis: radices autem ſecundi gradus vel ambae reales, vel ambae imaginariae ſunt (131, et ſeq.).

141. *Theor. Si in aequatione tertii gradus deficiente termino ſecundo tertius poſitiuus fuerit, habebuntur neceſſario radices imaginariae.*

Demonſtr. Si enim terminus ſecundus deſit, ſumma radicum poſitiuarum deſtruit ſummam negatiuarum (32): ergo vel vna poſitiua aequatur duabus negatiuis, vel vna negatiua duabus poſitiuis; adeoque radices, ſiquidem reales ſint, vel erunt $-a$, $-b$, $+c$; vel $+a$, $+b$, $-c$: et hinc coefficiens termini tertii erit $ab-ac-bc$; cum ergo deficiente termino ſecundo fit $a+b=c$, erit $ac>ab$, et hinc $ab-ac-bc$ erit quantitas negatiua; hoc eſt, ſi omnes radices reales ſint, terminus tertius negatiuus eſſe debet: ergo ſi ille poſitiuus eſt, nequeunt omnes radices eſſe reales, ac proinde duas imaginarias eſſe oportebit (140).

142. *Theor. Si binae eiuſdem radices imaginariae fuerint, tertia realis ſemper ſignum habet contrarium termino vltimo aequationis.*

Demonſtr. Vt enim aequatio illa ſecundi gradus, ex qua componitur aequatio tertii gradus, habeat binas radices imaginarias, debet habere terminum ſuum vltimum poſitiuum (135): ergo factum omnium trium radicum, ſeu terminus vltimus aequationis tertii gradus (26), qui ex hypotheſi rationalis eſt, debet habere ſignum contrarium radici reali (cit.).

E. g. Aequatio $x^3-6x^2+13x-20=0$ habet radicem realem 4, et poſtremum terminum -20 negatiuum. Aequatio $x^3+2x^2-3x+20=0$ habet radicem realem -4, ac terminum vltimum $+20$ poſitiuum.

143. *Theor. Si aequatio tertii gradus possit ad gradum inferiorem deprimi, necessario habet diuisorem vnius dimensionis huius formae* $x \pm a$.

Demonstr. Componitur enim vel ex tribus aequationibus simplicibus formae $x \pm a$; vel ex vna simplici, et altera secundi gradus (21): si ergo possit deprimi ad gradum inferiorem, semper poterit diuidi per aequationem simplicem formae $x \pm a$.

E. g. Aequatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ ope diuisionis factae per $x - 4$ deprimitur ad $x^2 - 2x + 5 = 0$.

144. *Coroll.* Huc pertinent aequationes tertii gradus termino vltimo carentes, quae continentur hac formula $x^3 + px^2 + qx = 0$, ac diuisione per $x = 0$ semper deprimuntur ad $x^2 + px + q = 0$.

145. *Theor. In aequationibus tertii gradus termino secundo carentibus quaenis trium radicum aequatur summae reliquarum acceptae cum signo contrario.*

Demonstr. Sint enim tres illae radices a, b, c; cum desit terminus secundus, erit summa earundem $a + b + c = 0$ (32): erit ergo $a = -(b+c)$, $b = -(a+c)$, $c = -(a+b)$.

146. *Coroll.* 1. Vt ergo radicum summa, seu coefficiens termini secundi fiat $= 0$, debent vel binae earum esse negatiuae, et vna positiua; vel binae positiuae, et vna negatiua: si enim vel omnes tres positiuae, vel omnes negatiuae essent, earum summa non foret $= 0$, adeoque terminus secundus non deficeret.

147. *Coroll.* 2. Hinc illa, quae reliquis binis signum contrarium habet, debet esse maior singulis, cum aequetur earum summae: quare debet esse radicum maxima.

148. *Coroll.* 3. Radix maxima semper habet signum contrarium termino vltimo. Cum enim productum reliquarum signum conforme habentium semper positiuum sit, productum omnium

trium ſemper habet ſignum radicis maximae: eſt autem hoc productum cum ſigno contrario acceptum terminus vltimus aequationis (26).

149. *Coroll.* 4. Si binae radices imaginariae fuerint, radix tertia realis ſemper erit maxima. Nam ſi duae radices imaginariae ſint, tertia realis ſemper habet ſignum contrarium termino vltimo (142): eſt ergo maxima (148).

150. *Coroll.* 5. Si duae radices idem ſignum habentes ſint aequales, ſingulae aequantur dimidio radicis maximae acceptae cnm ſigno contrario, cum radix maxima ſic accepta aequari debeat reliquarum ſummae, vt terminus ſecundus aequationis deſit.

151. *Coroll.* 6. Cumque tertia illa, ſeu maxima ſemper realis ſit ſi binae fuerint imaginariae (142), ac radicis realis etiam dimidium reale ſit, palam eſt binas radices imaginarias in huiuſmodi aequationibus non poſſe eſſe inter ſe aequales.

152. *Theor. Si aequatio tertii gradus carens termino ſecundo duas radices aequales habeat, coefficiens termini tertii ſemper negatiuus erit, et continebit tres quartas partes quadrati radicis maximae: poſtremus vero eiuſdem terminus continebit quartam partem cubi eiuſdem radicis maximae.*

Demonſtr. Sit enim radix maxima $= 2a$, erit quadratum eiuſdem $= 4a^2$, cubus $= 8a^3$, ac ſingulae minorum radicum erunt $= -a$ (150), et factum earundem $= a^2$ ſemper poſitiuum; factum autem maximae cum vtralibet e minoribus $= -2a^2$ ſemper negatiuum: quare ſumma productorum e ſingulis binariis, ſeu coefficiens termini tertii (26) erit $-2a^2 - 2a^2 + a^2 = -3a^2$ ſemper negatiuus, et aequalis tribus quadrantibus quadrati radicis maximae $4a^2$. Productum vero omnium radicum ſimul, ſeu terminus vltimus aequationis erit $2a \cdot a^2 = 2a^3$, ſeu quadrans cubi radicis maximae $8a^3$.

153. *Theor. In eodem casu cubus trientis coefficientis termini tertii cum signo contrario acceptus aequatur quadrato dimidii postremi termini.*

Demonstr. Sit eiusmodi aequatio $x^3+qx+r=0$, dico fore $-\frac{1}{27}q^3=\frac{1}{4}r^2$. Est enim termini tertii coefficiens $q=-3a^2$, et $r=2a^3$ (152): ergo $\frac{1}{3}q=-a^2$, et hinc $\frac{1}{27}q^3=-a^6$: seu $-\frac{1}{27}q^3=a^6$: item $\frac{1}{2}r=a^3$, et hinc $\frac{1}{4}r^2=a^6$: quare $-\frac{1}{27}q^3=\frac{1}{4}r^2$.

154. *Coroll.* Si ergo fuerit $-\frac{1}{27}q^3=\frac{1}{4}r^2$, seu $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=0$, aequatio habebit duas radices minores inter se aequales, et radix maxima reperietur vel $=\sqrt{-\frac{4}{3}q}=2\sqrt{-\frac{1}{3}q}$; vel $=\sqrt[3]{-4r}$ (152) praefigendo eidem signum contrarium termino vltimo r (148): radices autem minores erunt dimidia maximae cum signo contrario (150).

E. g. In aequatione $x^3-12x+16=0$ est $q=-12$, $r=16$, et hinc $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=64-64=0$: habet ergo haec aequatio duas minores radices inter se aequales, et radix maxima est $=2\sqrt{-\frac{1}{3}q}=2\sqrt{4}=-4$, cum terminus vltimus positiuus sit; vnde radices minores sunt 2 et 2.

155. *Theor. Si in aequatione tertii gradus carente secundo termino binae radices idem signum habentes reales, et inaequales sint,* 1) *Coefficiens termini tertii adhuc negatiuus erit,* 2) *Postremus terminus contrarium habebit signum radici maximae,* 3) *Quadratum radicis maximae minus erit quatuor trientibus coefficientis termini tertii, maius tamen ipso illo coefficiente accepto cum signo contrario,* 4) *Cubus vero eiusdem maior erit quadruplo termini vltimi.*

De-

Demonſtr. 1) Sit enim eiuſmodi aequatio $x^3+qx+r=0$, cuius radices minores ſint $-a+b$, et $-a-b$, erit earum ſumma $-2a$, adeoque radix maxima $=2a$ (32); illarum productum $=a^2-b^2$, producta maximae cum ſingulis $=-2a^2+2ab-2a^2-2ab=-4a^2$: quare productorum ſumma, ſeu coefficiens termini tertii q erit $=a^2-b^2-4a^2=-3a^2-b^2$ ſemper negatiuus ob quantitates a^2 et b^2 ſemper poſitiuas, cum omne quadratum ſemper poſitiuum ſit.

2) Factum omnium radicum, ſeu terminus vltimus erit $=2a(a^2-b^2)=2a^3-2ab^2$, et hinc $r=-2a(a^2-b^2)$ (26), qui ſemper erit valor contrarius valori $2a$ (148).

3) Cum fuerit $q=-3a^2-b^2$, erit $-\frac{1}{3}q=a^2+\frac{1}{3}b^2$, et hinc $-\frac{4}{3}q=4a^2+\frac{4}{3}b^2$, adeoque $4a^2<-\frac{4}{3}q$, ſeu quadratum radicis maximae minus erit quatuor trientibus coefficientis q negatiue ſumti. Cum vero radix $-a-b$ minor ſit, quam radix maxima negatiue ſumta, ſeu $-a-b<-2a$, erit $-b<-a$, ſeu $b<a$, et $b^2<a^2$: ergo $3a^2+b^2$ ſeu $-q<3a^2+a^2$, id eſt $4a^2>-q$: ſeu quadratum radicis maximae ſuperat coefficientem q negatiue ſumtum.

4) Denique cum fuerit $r=-2a(a^2-b^2)=-2a^3+2ab^2$, erit $r+2a^3=2ab^2$, et hinc $2ab^2>r$, et a fortiori $2a^3>r$, adeoque etiam $8a^3>4r$, id eſt cubus radicis maximae ſuperat quadruplum termini vltimi.

156. *Coroll.* Si binae illae radices idem ſignum habentes imaginariae fuerint, termini tertii coefficiens tam poſitiuus, quam negatiuus eſſe poterit; et ſiquidem negatiuus fuerit, quadratum radicis realis ſemper excedet quatuor eius trientes, et eiuſdem radicis cubus minor erit quadruplo termini vltimi cum ſigno contrario accepti. Nam vt radix $-a+b$ imaginaria ſit, debet eſſe b

radix quadrata quantitatis negatiuae, et hinc b^2 quantitas negatiua, adeoque $-b^2$ positiua: quare $q = -3a^2 - b^2$ potest esse positiuus, si nempe $-b^2 > -3a^2$, aut negatiuus, si $-b^2 < -3a^2$, seu si $b^2 < 3a^2$, quo casu erit $3a^2 > q$, et hinc $a^2 > \frac{1}{3}q$, et $4a^2 > \frac{4}{3}q$; hoc est, quadratum radicis realis superat quatuor trientes coefficientis q. At in hoc eodem casu $a^2 - b^2$ semper est quantitas positiua, cum tam a^2 semper, quam b^2 in hoc casu positiua sit, vnde $a^2 - b^2 > a^2$, et hinc $2a(a^2 - b^2)$, seu $-r > 2a^3$, et $-4r > 8a^3$.

157. *Theor. Quantitas* $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3$, *quae in casu binarum radicum aequalium aequatur nihilo, in casu binarum imaginariarum semper est positiua, in casu radicum omnium realium semper est negatiua.*

Demonstr. Sit enim in casu omnium radicum realium radix maxima $= 2a$, erit $4a^2 < -\frac{4}{3}q$, et $8a^3 > 4r$ (155): quare $a^2 < -\frac{1}{3}q$, et $a^3 > \frac{1}{2}r$: ergo illic ad cubum, hic ad quadratum eleuando erit $a^6 < -\frac{1}{27}q^3$, et $a^6 > \frac{1}{4}r^2$, et hinc $-\frac{1}{27}q^3 > \frac{1}{4}r^2$; adeoque cum in hoc casu coefficiens q semper negatiuus sit (cit.), quantitas $\frac{1}{27}q^3 + \frac{1}{4}r^2$ semper negatiua erit. In casu vero binarum radicum imaginariarum si coefficiens q positiuus est, patet quantitatem $\frac{1}{27}q^3 + \frac{1}{4}r^2$ positiuam esse: si autem negatiuus est, erit $4a^2 > -\frac{4}{3}q$, et $8a^3 < -4r$ (156): ergo $a^2 > -\frac{1}{3}q$, adeoque $a^6 > -\frac{1}{27}q^3$; et $a^3 < -\frac{1}{2}r$, adeoque $a^6 < \frac{1}{4}r^2$: ergo $\frac{1}{4}r^2 > -\frac{1}{27}q^3$, et hinc $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3$ erit quantitas rursus positiua.

158. *Coroll.* Non erit ex hiſce operoſum diiudicare, an aequatio propoſita tertii gradus carens ſecundo termino habeat binas radices aequales, an binas imaginarias, an omnes tres reales, quemadmodum declaratur exemplis ſequentibus.

Exempla.

I. Sit aequatio tertii gradus carens ſecundo termino $x^3 - 27x + 54 = 0$: erit $r = 54$, $q = -27$; hinc $\frac{1}{2}r = 27$, $\frac{1}{4}r^2 = 729$, $\frac{1}{3}q = -9$, $\frac{1}{27}q^3 = -729$: vnde $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 729 - 729 = 0$, ex quo adparet binas radices inter ſe aequales eſſe (154). Porro radix maxima $= 2\sqrt{-\frac{1}{3}q}$ (152) $= 2\sqrt{9} = -6$ ob terminum aequationis vltimum poſitiuum (148): adeoque radices minores aequales erunt 3 et 3; dimidia nempe radicis maximae -6 acceptae cum ſigno contrario (150).

II. Sit aequatio $x^3 - 30x - 36 = 0$; erit $r = -36$, $\frac{1}{2}r = -18$, $\frac{1}{4}r^2 = 324$; et $q = -30$, $\frac{1}{3}q = -10$, $\frac{1}{27}q^3 = -1000$: vnde $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 324 - 1000 = -676$, qui numerus cum ſit negatiuus, patet omnes tres radices reales eſſe (157), quarum maxima minor eſt quam $2\sqrt{-\frac{1}{3}q}$, maior quam $\sqrt{-q}$ (155), id eſt, minor eſt quam $2\sqrt{10}$, ſeu $\sqrt{40}$, et maior quam $\sqrt{30}$: ſi ergo rationalis ſit, debet contineri inter diuiſores termini vltimi 1, 2, 3, 4, 6 etc. adeoque cum lateat inter limites $\sqrt{40}$, et $\sqrt{30}$, nequit eſſe niſi 6, vti reapſe eſt, quemadmodum patebit ſubſtituenti.

III. Sit aequatio $x^3 + 3x - 14 = 0$: hoc ipſo, quod terminus tertius $3x$ poſitiuus ſit, iam adparet binas radices eſſe imaginarias, cum terminus ille negatiuus eſſe debeat, ſi radices omnes

reales sint (155). Idipsum etiam elucebit pro q et r valores substituendo: erit enim $r=-14, \frac{1}{2}r=-7, \frac{1}{4}r^2=49$; et $q=3, \frac{1}{3}q=1$, $\frac{1}{27}q^3=1$; adeoque $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=50$, quae quantitas cum positiua sit, perspicuum est radices binas imaginarias esse (157). Radix autem tertia realis minor esse debet quam $\sqrt[3]{-4r}$ (156), seu quam $\sqrt[3]{56}$, adeoque a fortiori minor, quam $\sqrt[3]{64}$, seu quam 4: si ergo rationalis sit, debet contineri inter diuisores termini vltimi, eritque vel 1, vel 2, estque reapse 2; quare facta per $x-2$ diuisione aequatio deprimitur ad $x^2+2x+7=0$, cuius radices sunt $-1\pm\sqrt{-6}$ ambae imaginariae.

IV. Sit aequatio $x^3-3x-14=0$: erit $r=-14, \frac{1}{2}r=-7$ $\frac{1}{4}r^2=49$; et $q=-3, \frac{1}{3}q=-1, \frac{1}{27}q^3=-1$; vnde $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=48$, qui numerus cum positiuus sit, patet binas radices imaginarias esse (157). Porro radix realis debet esse minor, quam $\sqrt[3]{-4r}$ (156), seu quam $\sqrt[3]{56}$, et maior quam $2\sqrt{-\frac{1}{3}q}$ (cit.), seu quam $2\sqrt{1}$, id est maior quam 2; ac proinde si rationalis sit, nequit esse, nisi ± 3, qui cum non adsit inter diuisores termini vltimi -14, in aperto est radicem realem esse irrationalem.

Scholion. Expensis praecipuis proprietatibus aequetionum tertii gradus, ipsas resolutiones earundem iam adgredimur. Sunt autem methodi in eam rem complures excogitatae, quibus persequendis tironem minime fatigabimus; verum proferemus vnicam, eamque maxime generalem, cuius vsus in casu quouis speciali admodum expeditus sit.

159. *Probl. Resoluere aequationes tertii gradus solum terminum primum, et vltimum habentes.*

Reſol. Omnes eiuſmodi aequationes continentur ſub hac formula $x^3+r=0$; hinc autem erit $x^3=-r$, et $x=\sqrt[3]{-r}$, quae expreſſio continet tres radicis valores, vnum ſcilicet realem, et duos imaginarios. Fiat enim $r=-a^3$, erit $x^3=a^3$, ac $x^3-a^3=0$, quo per $x-a$ diuiſo erit $x^2+ax+a^2=0$, et hinc $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-a^2\right)}=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{-\frac{3}{4}a^2}=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}a\sqrt{-3}=a.\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$: habebuntur adeo tres valores radicis x, nempe $x=a$, $x=a.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $x=a.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

160. *Coroll.* 1. Si ergo fuerit $a=1$, erunt tres vnitatis radices cubicae 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, quarum cuiuſuis cubus eſt $=1$.

161. *Coroll.* 2. Eodem modo adparet cuiuſuis quantitatis radices cubicas obtineri, ſi radix eiuſdem realis ducatur in hos tres valores 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. E. g. radices cubicae numeri 8 erunt 2, $2.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $2.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ſeu 2, $-1+\sqrt{-3}$, $-1-\sqrt{-3}$, quarum cuiuſuis cubus eſt $=8$.

162. *Probl. Inuenire formulas generales radicum pro quauis aequatione tertii gradus omnes terminos habente.*

Reſol. Tollatur ſecundus aequationis terminus (60), reducetur ea ad hanc formam $x^3+qx+r=0$: et quia tollendo ſecundum terminum radices datae aequationis augentur, vel minuuntur data quantitate rationali, patet aequationem propoſitam in eodem eſſe caſu relate ad radices reales, vel imaginarias, in quo eſt eiuſdem transformata, in quam nempe mutatur ſublato ſecundo termino.

Fiat iam $x=y+u$, aequatio $x^3+qx+r=0$ abibit in hanc

$$\begin{array}{l} y^3+3uy^2+3u^2y+u^3=0 \\ \qquad +qy \quad +qu \\ \qquad\qquad +r \end{array}$$

Quia quantitates introductae y et u sunt indeterminatae, earum alterutra pro arbitrio assumi potest: ponamus vnam earum y eiusmodi esse, vt pars aequationis y^3+r+u^3 fit $=0$; cum tota aequatio fit $=0$, etiam altera eiusdem pars $3uy^2+3u^2y+qy+qu$ erit $=0$, quam diuidendo per $y+u$ erit $3uy+q=0$, et hinc $u=-\frac{q}{3y}$, et $u^3=-\frac{q^3}{27y^3}$, quo valore in priore parte substituto erit $y^3+r-\frac{q^3}{27y^3}=0$, seu $y^6+ry^3-\frac{1}{27}q^3=0$, et hinc $y=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}\right)}$ (137).

Inuento valore y facile reperietur u ope aequationis $y^3+r+u^3=0$: erit enim hinc $u^3=-r-y^3$; seu pro y^3 ponendo valorem e postrema superiore aequatione eruendum erit $u^3=-r+\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}=-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}$, et hinc $u=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}\right)}$. Nempe vbi valor y habet signum $\pm$, ibi valor u habet $\mp$; adeoque si in valore y assumatur signum $+$, in valore u assumi debet $-$, et contra. Cum ergo fuerit $x=y+u$, erit $x=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}\right)}$, quae duae expressiones in idem recidunt, cum per signa $\pm$ et $\mp$ ordo duntaxat mutetur duorum terminorum, et summa maneat eadem. Habemus adeo formulam pro vna e tribus radicibus aequationis $x^3+qx+r=0$.

Vt formulae duarum reliquarum radicum inueniantur, debet aequatio propoſita $x^3+qx+r=0$ diuidi per aequationem vnius dimenſionis $x-m-n=0$ (18); vbi m denotet primum membrum, n ſecundum valoris ſupra inuenti. Vt autem haec diuiſio facilior accidat, aduertendum eſt, quod ſi prioris radicis partes m et n in ſe ducantur, fiat $mn=-\sqrt[3]{+\frac{1}{27}q^3}=-\frac{1}{3}q$, et hinc $q=-3mn$: item ſi cubi earundem partium addantur, fiat $m^3+n^3=-r$, et hinc $r=-m^3-n^3$: quare ſi in aequatione propoſita $x^3+qx+r=0$ pro q et r hi valores ſubſtituantur, fiet $x^3-3mnx-m^3-n^3=0$, qua aequatione per $x-m-n$ diuiſa obueniet $x^2+mx+nx+m^2+n^2-mn=0$, cuius radices ſunt $x=\frac{-m-n}{2}\pm\frac{1}{2}(m-n\sqrt{-3})$: quare ſubſtitutis valoribus m et n erit

$$x=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3)}\right)}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3)}\right)}$$
$$\pm\left(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3)}\right)}\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3)}\right)}\right)\sqrt{-3}.$$

163. *Coroll.* 1. Habemus adeo tres formulas generales radicum aequationis tertii gradus ſecundo termino carentis, quas vulgo *formulas Cardani* adpellare ſolent. Antequam vero eaſdem reddamus ſimpliciores, in contemplatione primae formulae nonnihil immorabimur.

164. *Coroll.* 2. In radicali $\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}$ imaginaritas ſemper inuoluetur, ſi coefficiens termini tertii q negatiuus fue-

rit, et $\frac{1}{27}q^3 > \frac{1}{4}r^2$. In casibus vero ceteris non inuoluetur: nam $\frac{1}{4}r^2$ vtpote quadratum quantitatis realis semper est positiuum, adeoque quantitas $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3$ nequit esse valoris negatiui, nisi valor q negatiuus sit, et $\frac{1}{27}q^3 > \frac{1}{4}r^2$.

165. *Coroll.* 3. Cum ergo in casu omnium radicum realium ea quantitas semper valoris negatiui sit, in casu vero binarum imaginariarum semper positiui (157), in casu primo semper inuoluet imaginareitatem, in secundo non inuoluet.

166. *Coroll.* 4. Haec porro imaginareitas non indicat radicem x esse imaginariam, cum in eo ipso casu omnes tres radices reales sint, ac binorum membrorum imaginareitates sese elidant.

167. *Coroll.* 5. Atque hic casus aequationum tertii gradus adpellari solet *irreducibilis*, quod scilicet ob imaginareitatem in radicali $\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3\right)}$ inuolutam radix generaliter erui nequeat, nisi per adproximationes infra explicandas.

Scholion. Radices in casu irreducibili reales esse etiam directe ostendi potest. Si enim in prima radicum formula fiat $\frac{1}{2}r = a$, $\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3\right)} = b\sqrt{-1}$, erit $x = \sqrt[3]{(-a + b\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(-a - b\sqrt{-1})}$. Si iam valor vtriusque membri quaeratur per series infinitas, ac eae series addantur, patebit in ea summa omnes terminos fore reales, ac proinde etiam valorem x realem fore. Eodem modo poterit ostendi etiam duos reliquos valores fore reales. Sed iam tempus admonet, vt inuentas formulas ad simpliciores expressiones reducamus, vsumque earundem exemplis compluribus tironi illustremus.

168.

168. *Probl. Inuentas radicum formulas ad ſimpliciores expreſſiones reducere.*

Reſol. Fiat $-\frac{1}{2}r+\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}=c^3$, $-\frac{1}{2}r-\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}=d^3$, erit prioris radix cubica triplex: nempe $c, c.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, c.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; et poſterioris itidem triplex, nempe $d, d.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, d.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (161). Tametſi autem ſex hi valores nouem modis poſſint combinari, quia tamen ex aequatione $3uy+q=0$ (162) habetur uy, ſeu hic $cd=-\frac{1}{3}q$, ii tantum valores membrorum u et y poſſunt eſſe vſui, quorum factum ſemper ſit idem cd; ſunt autem hi: $c+d, c.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+d.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $c.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+d.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Fiat rurſus $c=m+\sqrt{n}$, adeoque $d=m-\sqrt{n}$, erit $c+d=2m$, $c.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n}).\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m+m\sqrt{-3}-\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2}$; et $d.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m-\sqrt{n}).\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-m\sqrt{-3}+\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2}$, quorum ſumma eſt $\frac{-2m+2\sqrt{-3n}}{2}=-m+\sqrt{-3n}$. Similier $c.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n}).\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-m\sqrt{-3}-\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$; et $d.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(m-\sqrt{n}).\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m+m\sqrt{-3}+\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$, quorum ſumma eſt $=\frac{-2m-2\sqrt{-3n}}{2}=-m-\sqrt{-3n}$. Habemus adeo expreſſiones trium radicum ſimpliciores $x=2m$, $x=-m+\sqrt{-3n}$, $x=-m-\sqrt{-3n}$, quarum prima ſemper habet radicem realem; reliquae duae realem, ſi n habet valorem negatiuum, ſeu $-3n$ valorem poſitiuum; imaginarium, ſi n habet valorem poſitiuum.

169. *Probl. E binomio partim radicali, partim rationali huius formae* $m+\sqrt{n}$ *radicem cubicam extrahere.*

Reſol. Sit radicis cuiuſuis binomiae $x+y$ cubus $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, qui ponatur $=m+\sqrt{n}$. Si in aſſumta radice quantitas x fuerit rationalis, et y irrationalis, erit pars cubi x^3+3xy^2 rationalis, et $=m$; pars altera $+3x^2y+y^3$ erit irrationalis, et $=\sqrt{n}$. Vt iam ope harum duarum aequationum eliminetur y, capiatur e ſecunda $y^3=-3x^2y+\sqrt{u}$, ac e prima $y^2=\frac{m-x^3}{3x}$, ac ducendo in y erit $y^3=\frac{my-x^3y}{3x}$: quare conferendo duos valores inuentos y^3 erit $-3x^2y+\sqrt{n}=\frac{my-x^3y}{3x}$, ſeu $-9x^3y+3x\sqrt{n}=my-x^3y$, vnde $3x\sqrt{n}=my+8x^3y$, et $\frac{3x\sqrt{n}}{m+8x^3}=y$, ac ad quadratum eleuando $\frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2}=y^2$, quem valorem conferendo cum valore eiuſdem y^2 iam ſupra reperto erit $\frac{m-x^3}{3x}=\frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2}$, vnde $(m-x^3).(m+8x^3)^2=27nx^3$, ac facta reapſe multiplicatione, et aequationis ordinatione erit $64x^9-48mx^6-15m^2x^3-m^3=0$.
$+27nx^3$

Si iam in hac aequatione poſtrema fiat $x^3=\frac{1}{8}u$, deprimetur illa ad gradum tertium, et carebit termini primi coefficiente: erit enim $\frac{1}{2}u^3-\frac{3}{4}mu^2+\frac{27n-15m^2}{8}u-m^3=0$, ac omnia per 8 multiplicando erit $u^3-6mu^2+(27n-15m^2)u-8m^3=0$. Iam ex reſolutione huius aequationis obtinetur u; inuento u habebitur etiam $x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}u}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}$: et quia fuit $y^2=\frac{m-x^3}{3x}$, inuenietur $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}$. Quare ſi in aequatione illa va-

lor u inueniatur, ac valores dati m et n substituantur, habebitur $x+y=\sqrt[3]{(m+\sqrt{n})}$, seu radix cubica binomii propositi.

170. *Coroll.* 1. Vt valor u ex aequatione illa cubica facilius eruatur, aduertendum est, primum radicis quaesitae membrum x debere esse rationale: vnde erit etiam valor $u=8x^3$ rationalis, adeoque comparens inter diuisores termini vltimi $8m^3$. Porro cum sit $\sqrt[3]{u}=2x$, et hic debeat esse rationalis, debet u habere radicem cubicam rationalem, ac proinde inter diuisores termini vltimi $8m^3$ ii soli adhibendi erunt pro u, qui habent radicem cubicam; et hinc radix cubica diuisorum tentandorum debet contineri inter diuisores radicis cubicae termini vltimi $8m^3$, seu inter diuisores quantitatis $2m$.

171. *Coroll.* 2. Cumque binomio fractione carente etiam x eadem carere debeat (42), adeoque etiam x^3 seu $\frac{1}{8}u$, diuisor pro u adhibendus debet posse diuidi per 8, seu eius radix cubica per 2. Hinc tantum diuisores quantitatis m tentandi erunt, eritque valor quaesitus u inter cubos horum diuisorum ductos in 8, quorum si nullus satisfaciat, argumento erit non posse e proposito binomio radicem cubicam extrahi.

172. *Coroll.* 3. Denique si $\sqrt{n}$ fuerit valor realis, tunc etiam valor y inde enascens realis erit, adeoque y^2 quantitas positiua. Quare in aequatione $x^3+3xy^2=m$ membrum primum, adeoque etiam valor m erit positiuus, vel negatiuus, prout x signum + vel — habuerit, et hinc m, ac proinde etiam u eiusdem erit signi cum x; vnde pro eruendo valore u diuisores adhibendi erunt tantum cum signo valoris m: at si $\sqrt{n}$ sit valor imaginarius, iidem diuisores cum signo vtroque tentandi erunt.

Scholion. Si numerus propoſitus habens formam $m+\sqrt{n}$ ſit quidem ab omni fractione liber, vt eſt $2+\sqrt{5}$, eius tamen radix cubica $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ contineat fractionem, methodus haec non ſufficit, ſed ſaepe in errorem inducit iudicandi nullam haberi radicem eiuſmodi numeri. Quare ad vitandum hoc periculum, quaeratur directe, cuiuſnam conditionis debeant eſſe radices fractionariae numerorum integrorum. Hunc in finem exprimatur eiuſmodi radix per $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}$, ita vt neque a et m, neque b et n habeant communem diuiſorem praeter vnitatem, erit $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)^3 = \frac{a^3}{m^3}+\frac{3a^2b}{m^2n}+\frac{3ab^2}{mn^2}+\frac{b^3}{n^3} = \frac{a^3}{m^3}+\frac{3ab^2}{mn^2}+\left(\frac{3a^2}{m^2n}+\frac{b^2}{n^3}\right)b$, vbi priores duo termini exhibent numeri propoſiti partem rationalem, poſteriores duo irrationalem. Iam ex hypotheſi tam pars rationalis, quam coefficiens partis irrationalis debent eſſe numeri integri; quare fiat $\frac{3a^2}{m^2n}+\frac{b^2}{n^3}=r$, erit $b^2=rn^3-\frac{3a^2n^2}{m^2}$: atqui b^2, item rn^3 ſunt quantitates integrae: ergo etiam $\frac{3a^2n^2}{m^2}$, adeoque etiam $\frac{3n^2}{m^2}$ eſt quantitas integra, ſeu n debet eſſe multiplum denominatoris m. Fiat igitur $n=mt$, erit $b^2=rm^3t^3-3a^2t^2$: ſi iam hi valores quantitatum n et b^2 ſubſtituantur in quantitate integra $\frac{a^3}{m^3}+\frac{3ab^2}{mn^2}$, erit $\frac{a^3}{m^3}+\frac{3arm^3t^3-9a^3t^2}{m^3t^2}=3art-\frac{8a^3}{m^3}$ numerus integer: quia vero numeri a et m nullum habent communem diuiſorem, nequit haec quantitas numerus eſſe integer, niſi m fit $=1$ vel $=2$: ergo prior radicis quaeſitae pars rationalis nequit habere alium denominatorem, quam 2. Sed neque pars altera irrationalis alium habere poteſt; cum enim fuerit $b^2=rm^3t^3-3a^2t^2$ erit $\frac{b}{t}=\sqrt{(rm^3t-3a^2)}$, et hinc $\frac{b}{mt}=\frac{b}{n}=\frac{1}{m}\sqrt{(rm^3t-3a^2)}$, vbi deno-

minator est $= m$, adeoque $= 2$. Si ergo numeri propositi $m + \sqrt{n}$ constantis meris numeris integris radix methodo praecedenti erui nequeat, ducendus erit numerus ille in 8, tum per illam methodum quaerenda eiusdem radix, quae si erui nequeat, indicio erit numerum propositum non esse cubicum; sin autem erui possit, dimidium eius radicis erit radix quaesita numeri proposîti.

Exempla.

I. Quaeratur $\sqrt[3]{(-5+\sqrt{-2})}$: erit $m=-5, n=-2$, adeoque his valoribus in aequatione cubica superiore substitutis erit $u^3 + 30u^2 - 429u + 1000 = 0$. Iam $m=-5$ solos 1 et 5 diuisores habet, quorum cubi ducti in 8 sunt 8, et 1000: quare pro u inter omnes termini vltimi diuisores hi soli adhibendi sunt, at cum vtroque signo ob valorem n negatiuum; cumque diuidi possit aequatio per $u-8$, erit $u=8$, et hinc $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}=1$, $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}=\sqrt{\left(\frac{-5-1}{3}\right)}=\sqrt{-2}$: ergo radix quaesita est $1+\sqrt{-2}$.

II. Quaeratur $\sqrt[3]{(80+48\sqrt{3})}=\sqrt[3]{(80+\sqrt{6912})}$: erit $m=80$, $n=6912$; vnde $u^3 - 480u^2 + 90624u - 4096000 = 0$. Iam inter diuisores valoris $m=80$ occurrit 2, cuius cubus 8 ductus in 8 gignit 64, quod occurrit inter diuisores termini vltimi, et per $u-64$ aequatio diuidi exacte potest: quare $u=64$, et hinc $x=\frac{1}{2}\sqrt{u}=2$, et $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}=\sqrt{\left(\frac{80-8}{6}\right)}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Est adeo radix quaesita $2+2\sqrt{3}$.

III. Quaeratur $\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})}=\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}$: erit $m=7$, $n=50$; vnde $u^3 - 42u^2 + 615u - 2744 = 0$. Iam valor $m=7$ solos habet diuisores 1, et 7, et cubus 1 ductus in 8, seu 8 habetur

inter diuisores termini vltimi, estque aequatio exacte diuisibilis per $u-8$: ergo $u=8$, et hinc $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}=1$, ac $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}=\sqrt{\left(\frac{7-1}{3}\right)}=\sqrt{2}$. Est adeo radix quaesita $1+\sqrt{2}$.

IV. Quaeratur $\sqrt[3]{(-10+9\sqrt{-3})}=\sqrt[3]{(-10+\sqrt{-243})}$: erit $m=-10, n=-243$; vnde $u^3+60u^2-8061u+8000=0$. Iam diuisores valoris m sunt $1, 2, 5, 10$; et quidem diuisoris 2 cubus 8 ductus in 8, seu 64 comparet inter diuisores termini vltimi, ac positiue sumtus satisfacit, cum aequatio per $u-64$ sit exacte diuisibilis: est adeo $u=64$, et hinc $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{64}=2$, et $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}=\sqrt{\left(\frac{-10-8}{6}\right)}=\sqrt{-3}$. Est ergo radix quaesita $2+\sqrt{-3}$.

V. Quaeratur $\sqrt[3]{(45-29\sqrt{2})}=\sqrt[3]{(45-\sqrt{1682})}$; erit $m=45, n=1682$; hinc $u^3-270u^2+15039u-729000=0$. Iam diuisores valoris m seu 45 sunt $1, 3, 5, 9, 15, 45$; et quidem cubus diuisoris 3, nempe 27 ductus in 8, id est 216 reperitur inter diuisores termini vltimi, estque aequatio accurate diuisibilis per $u-216$: est ergo $u=216$, adeoque $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}=3$, et $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}=\sqrt{\left(\frac{45-27}{9}\right)}=\sqrt{2}$. Igitur radix quaesita est $3-\sqrt{2}$.

VI. Quaeratur $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}$: erit $m=20, n=392$; vnde $u^3-120u^2+4584u-64000=0$. Iam diuisores valoris m sunt $1, 2, 4, 5, 10, 20$; et quidem diuisoris 2 cubus 8 ductus in 8 generat factum 64, quod est inter diuisores termini vltimi, ac satisfacit, cum aequatio sit exacte diuisibilis per $u-64$:

eſt ergo $u=64$, adeoque $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}=2$, et $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}$ $=\sqrt{\left(\frac{20-8}{6}\right)}=\sqrt{2}$. Quare radix quaeſita eſt $2+\sqrt{2}$.

173. *Probl. Reſoluere aequationes tertii gradus nullo termino carentes.*

Reſol. Sublato termino ſecundo (60) conferatur aequatio cum formula generali $x^3+qx+r=0$, ac inde eruti valores quantitatum q et r ſubſtituantur in formula prima generali radicis x, reperientur valores m et n, quos ſubſtituendo in poſtremis radicum formulis $2m, -m+\sqrt{-3}n, -m-\sqrt{-3}n$, obtinebuntur radices quaeſitae aequationis termino ſecundo carentis, atque adeo etiam radices aequationis propoſitae, vti adparebit e reſolutionibus exemplorum.

Exempla.

I. Sit $y^3-6y^2+3y+20=0$. Vt ſecundus terminus tollatur, fiat $y=x+2$, erit facta ſubſtitutione $x^3-9x+10=0$, qua aequatione collata cum generali illa $x^3+qx+r=0$, erit $q=-9$, $r=10$, et hinc $-\frac{1}{2}r=-5$, $\frac{1}{3}q=-3$, adeoque $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=25-27=-2$: ergo

$$x=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3\right)}\right)}$$

$=\sqrt[3]{(-5+\sqrt{-2})}+\sqrt[3]{(-5-\sqrt{-2})}$, vbi cum $\sqrt{-2}$ inuoluat imaginareitatum, iam patet omnes tres radices reales eſſe. Porro radix cubica binomii $-5+\sqrt{-2}$ eſt $1+\sqrt{-2}$, et binomii $-5-\sqrt{-2}$ radix eſt $1-\sqrt{-2}$: ergo eſt $m=1, n=2$, quibus valoribus in radicum formulis ſubſtitutis obtinebuntur aequationis $x^3-9x+10=0$ radices $2, -1+\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}$;

quod ipſum adparebit diuiſione per $x-2$ deprimendo aequationem ad $x^3+2x-5=0$, cuius radices ſunt $-1\pm\sqrt{6}$. Quia vero poſuimus $y=x+2$, erit $y=4, 1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}$, quae proinde ſunt radices aequationis propoſitae, vti rurſus adparebit, ſi diuiſione per $y-4$ deprimatur aequatio ad $y^2-2y-5=0$, cuius radices ſunt $1\pm\sqrt{6}$.

II. Sit $x^3-12x^2+41x-42=0$. Vt ſecundus terminus tollatur, fiat $x=y+4$, erit factis ſubſtitutionibus $y^3-7y-6=0$, vnde $q=-7, r=-6, -\frac{1}{2}r=3, \frac{1}{3}q=\frac{-7}{3}$, adeoque $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=9\frac{-343}{27}=\frac{-100}{27}$: quare $y=\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{\frac{-100}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{\frac{-100}{27}}\right)}$; ſunt vero binomiorum $3+\sqrt{\frac{-100}{27}}$, et $3-\sqrt{\frac{-100}{27}}$ radices cubicae $-1+\sqrt{-\frac{4}{3}}$, et $-1-\sqrt{-\frac{4}{3}}$; vnde $m=-1, n=-\frac{4}{3}$: quibus valoribus ſubſtitutis obtinentur tres valores y, nempe $-2, 1+\sqrt{4}, 1-\sqrt{4}$, ſeu $-2, 3, -1$; quia vero poſuimus $x=y+4$, erunt valores x hi tres $2, 7, 3$.

III. Sit $x^3+15x^2+84x-100=0$. Vt ſecundus terminus tollatur, fiat $x=y-5$, erit factis ſubſtitutionibus $y^3+9y-270=0$; vnde $q=9, r=-270, -\frac{1}{2}r=135, \frac{1}{3}q=3$, adeoque $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=18225+27=18252$, et hinc $y=\sqrt[3]{(135+\sqrt{18252})}+\sqrt[3]{(135-\sqrt{18252})}$: ſunt vero horum binomiorum radices cubicae $3+\sqrt{12}$, et $3-\sqrt{12}$; quare $m=3$, $n=12$: quibus valoribus ſubſtitutis obtinentur tres valores y, ſcilicet $6, -3+\sqrt{-36}, -3-\sqrt{-36}$: cum ergo poſuerimus $x=y-5$, erunt radices x valores $1, -8+\sqrt{36}, -8-\sqrt{-36}$.

IV.

IV. Sit $x^3+3x-14=0$; erit $q=3, r=-14, -\frac{1}{2}r=7, \frac{1}{3}q=1$, adeoque $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=49+1=50$, et hinc $x=\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}+\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}$, vbi cum $\sqrt{50}$ imaginareitatem non inuoluat, ſicuti etiam in exemplo ſuperiore, perſpicuum eſt duas radices eſſe imaginarias, et vnam realem. Porro binomiorum $7+\sqrt{50}$, et $7-\sqrt{50}$ radices cubicae ſunt $1+\sqrt{2}$, et $1-\sqrt{2}$: quare $m=1$; $n=2$, quibus valoribus ſubſtitutis tres aequationis propoſitae radices erunt $2, -1+\sqrt{-6}, 1-\sqrt{-6}$: id ipſum patebit, ſi aequatio diuiſione per $x-2$ deprimitur ad x^2+2x+7, cuius radices ſunt $-1\pm\sqrt{-6}$.

V. Sit $x^3+3x-4=0$, erit $q=3, \frac{1}{3}q=1, r=-4, -\frac{1}{2}r=2$, adeoque $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=1+4=5$; vnde $x=\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})}$, ex quo rurſus adparet duas radices eſſe imaginarias. Sunt vero binomiorum $2+\sqrt{5}$, et $2-\sqrt{5}$ radices cubicae $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, et $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, ſeu $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$, et $\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$: ergo $m=\frac{1}{2}, n=\frac{5}{4}$; quibus valoribus ſubſtitutis erunt radices aequationis propoſitae $1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-15}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-15}$. Et certe aequatio propoſita per $x-1$ diuiſa deprimitur ad $x^2+x+4=0$, cuius radices ſunt $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-15}$.

VI. Sit $x^3-x+6=0$, erit $q=-1, \frac{1}{3}q=-\frac{1}{3}, r=6, \frac{1}{2}r=3$, adeoque $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=9-\frac{1}{27}=\frac{242}{27}$; vnde $x=\sqrt[3]{\left(-3+\sqrt{\frac{242}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-3-\sqrt{\frac{242}{27}}\right)}$, quorum binomiorum radices cubicae ſunt $-1+\sqrt{\frac{2}{3}}$, et $-1-\sqrt{\frac{2}{3}}$: quare

$m=-1, n=\frac{2}{3}$, quibus valoribus ſubſtitutis obtinentur tres aequationis propoſitae radices $-2, 1+\sqrt{-2}, 1-\sqrt{-2}$. Quod ſi diuiſione per $x+2$ deprimatur aequatio ad $x^2-2x+3=0$, erunt huius radices $-1\pm\sqrt{-2}$.

VII. Sit $y^3+3y^2-3y+25=0$. Vt tollatur ſecundus terminus, fiat $y=x-1$, erit factis ſubſtitutionibus $x^3-6x+30=0$, vbi $q=-6, \frac{1}{3}q=-2, r=30, \frac{1}{2}r=15$; vnde $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=225-8=217$, adeoque $x=\sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})}+\sqrt[3]{(-15-\sqrt{217})}$, quae binomia cum non ſint cubica, non habent accuratas radices (171): hinc nequit valor x obtineri, niſi adproximando, quemadmodum docebimus in ſequentibus.

Scholion. Saepe quantitatis $-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3\right)}$ radix cubica formae $m\pm\sqrt{n}$ inueniri non poteſt, vt in exemplo poſtremo vidimus: quod quidem ſemper contingit, dum aequatio tertii gradus in propria ſua ſede eſt, ita vt nequeat per diuiſionem ad gradum inferiorem deprimi. Si enim radix cubica formae $m\pm\sqrt{n}$ inueniretur, foret m, adeoque etiam prima radicum $2m$ quantitas rationalis, poſſetque aequatio diuiſione per $x-2m$ deprimi. Imo tametſi aequatio radicem habeat rationalem, ac deprimi poſſit, tamen interdum ea radicis forma obtineri nequit. Quare in huiuſmodi caſibus recurrendum erit ad adproximationes, quas in ſequentibus explicabimus.

CAPVT IV.

De Reſolutionibus Aequationum quarti gradus.

174. Ex ipſa aequationum compoſitione perſpicuum eſt, aequationes quarti gradus poſſe componi 1) E quatuor aequationibus gradus primi, 2) E binis gradus ſecundi, 3) Ex vna pri-

mi, et vna gradus tertii (21). Quare gradus quarti aequationes habere poſſunt vel radices omnes reales, quas nimirum habent quatuor illae ſimplices componentes; vel binas reales, et binas imaginarias, quas habet aequatio componens tertii, aut ſecundi gradus, vel denique omnes imaginarias, quas nempe habent duae illae componentes ſecundi gradus.

175. *Coroll.* 1. Si deficiente ſecundo termino tertium habet poſitiuum, neceſſario aderunt radices imaginariae. Nam ſi deſit ſecundus terminus, vel tres radices poſitiuae a, b, c ſimul aequabuntur vni negatiuae $-d$; vel tres negatiuae $-a$, $-b$, $-c$ vni poſitiuae d; vel denique duae negatiuae $-a$, $-b$, duabus poſitiuis ſimul c, d: in primis duobus caſibus coefficiens termini tertii erit $ab+ac+bc-ad-bd-cd$; atqui ob terminum ſecundum deficientem eſt $a+b+c=d$, et hinc $ad>ab$, $cd>ac$, $bd>bc$: ergo terminus tertius negatiuus eſt, ſi radices omnes reales ſint. In caſu tertio coefficiens termini tertii eſt $ab-ac-bc-ad-bd+cd$; atqui ob deficientem terminum ſecundum eſt $a+b=c+d$. Fiat ergo $m=a+b=c+d$, erit

$$m^2=(a+b).(c+d)=ac+ad+bc+bd, \text{ et}$$
$$m^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \text{ item}$$
$$m^2=(c+d)^2=c^2+2cd+d^2; \text{ vnde}$$
$$ab=\frac{m^2-a^2-b^2}{2}, \text{ et}$$
$$cd=\frac{m^2-c^2-d^2}{2}: \text{ ergo}$$
$$ab+cd=m^2\frac{-a^2-b^2-c^2-d^2}{2}; \text{ unde}$$
$$m^2>ab+cd, \text{ ſeu}$$
$$ac+ad+bc+bd>ab+cd:$$

Quare ſi omnes radices reales ſint, terminus tertius debet eſſe negatiuus: ſi ergo is poſitiuus ſit, nequeunt omnes radices reales eſſe, ſed aliquas oportet imaginarias eſſe.

176. *Coroll.* 2. Si terminus vltimus negatiuus fit, nequeunt omnes radices esse imaginariae. Si enim radices forent omnes imaginariae, aequatio componeretur e duabus aequationibus secundi gradus (174): cum ergo aequationes secundi gradus habentes radices imaginarias terminum vltimum habere debeant positiuum (135), duae idgenus aequationes necessario producerent in aequatione composita quarti gradus terminum vltimum positiuum.

177. *Coroll.* 3. Quare ope corollariorum praecedentium discerni potest, an aequatio quarti gradus habeat radices imaginarias, et an omnes tales habeat.

178. *Coroll.* 4. Si aequationes quarti gradus termino vltimo careant, deprimi possunt diuisione per $x=0$. Si solum terminum primum cum postremo habeant, sintque sub forma $x^4+r=0$, resoluentur duplici radicis quadratae extractione: erit enim $x^4=-r$, $x^2=\pm\sqrt{-r}$, $x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{-r}}$. Denique si careant termino secundo, et quarto simul, sintque sub forma $x^4+qx^2+r=0$, resoluentur more aequationum secundi gradus (137).

179. *Coroll.* 5. Restant ergo solae aequationes quarti gradus vel nullo, vel secundo tantum termino carentes. Si adsit secundus terminus, eodem sublato, commodissimum erit huiusmodi aequationes spectare tanquam compositas e duabus secundi gradus, quarum coefficientes determinentur ope aequationum gradu quarto inferiorum, id quod problemate sequenti docebimus.

180. *Probl. Data aequatione quarti gradus, inuenire eiusdem deriuatam cubicam, duas item aequationes secundi gradus eandem componentes.*

Resol. Sublato secundo termino aequationes quarti gradus reuocantur ad hanc formulam $x^4+px^3+qx+r=0$, quae concipi potest tanquam composita e binis aequationibus secundi gradus,

in quibus coefficientes termini ſecundi ſint iidem, ſed cum ſignis contrariis: cum enim in aſſumta formula deſit terminus ſecundus, ſumma radicum eiuſdem aequatur nihilo (32); atqui coefficientes ſecundorum terminorum in aequationibus componentibus continent ſummas binarum (26): ergo cum hae ſummae ſeſe elidere debeant, debent ii coefficientes aequales eſſe, et ſigna habere contraria.

Aſſumantur ergo pro componentibus hae duae aequationes $x^2+ux+m=0$, et $x^2-ux+n=0$, in quibus determinandi erunt valores u, m, n, vt datam aequationem particularem componant. Formetur porro ex his in ſeſe ductis aequatio ſequens

$$\left.\begin{matrix} x^4 - u^2 \\ +m \\ +n \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} -mu \\ +nu \end{matrix}\right\} x + mn = 0$$

qua collata cum formula generali aſſumta erit 1) $-u^2+m+n=p$, 2) $-mu+nu=q$, 3) $mn=r$, quarum aequationum ope eliminatis m et n obtinebitur aequatio per u. Ducatur hunc in finem aequatio prima in u, tum addatur ſecundae, fiet $2nu-u^3=pu+q$, et hinc $n=\frac{q+pu+u^3}{2u}$, quo valore in tertia aequatione ſubſtituto eruitur $m=\frac{2ru}{u^3+pu+q}$. Si iam valores inuenti m et n ſubſtituantur in ſecunda, erit $\frac{u^3+pu+q}{2}-\frac{2ru^2}{u^3+pu+q}=q$, et hinc $u^6+2pu^4+p^2u^2-4ru^3-q^2=0$, vbi ſi fiat $u^2=y$, reducetur aequatio ad gradum tertium $y^3+2py^2+p^2y-4ry-q^2=0$, quae idcirco adpellatur *cubica deriuata*, e cuius reſolutione pendet reſolutio aequationis quarti gradus, e qua deriuata eſt.

Si iam ex inuenta cubica deriuata eruatur valor u, ac vna cum inuentis valoribus m et n in duabus illis componentibus ſecundi gradus, quas deinceps *ſubſidiarias* vocabimus, ſubſtituatur,

habebuntur ſubſidiariae ſpeciales datam aequationem particularem componentes.

181. *Coroll.* 1. Si data aequatio quarti gradus poſſit accurate diuidi in binas ſubſidiarias irrationalitate carentes, debebunt haberi valores u ſaltem duo rationales, adeoque debebit u^2 eſſe quantitas rationalis, et hinc $y=y^2$ debebit ſaltem vnum valorem habere rationalem, et quadraticum, qui cum debeat contineri inter diuiſores termini vltimi aequationis cubicae deriuatae q^2, neceſſario valor rationalis u continebitur inter diuiſores quantitatis q, quorum ſi nullus ad quadratum euectus exhibeat radicem rationalem aequationis cubicae deriuatae, id erit indicio aequationem propoſitam quarti gradus non poſſe diuidi in duas ſecundi gradus irrationalitate carentes.

182. *Coroll.* 2. Huc etiam pertinent aequationes omnes huius formae $x^{4m}+px^{3m}+qx^{2m}+rx^m+t=0$; quiſcunque enim fuerit valor m, poſito $x^m=y$ abeunt in $y^4+py^3+qy^2+ry+t=0$, vnde tolli poteſt ſecundus terminus. Quare huiuſmodi aequationes eodem modo reſoluuntur, quo aequationes gradus quarti.

183. *Coroll.* 3. Si in aequationibus illis ſubſidiariis ſoli valores m et n ſupra inuenti ſubſtituantur, abibunt eaedem in has $x^2+ux+\frac{2r}{u^2+p+\frac{q}{u}}=0$, et $x^2-ux+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2u}=0$, quarum radices ſunt $x=-\frac{1}{2}u\pm\sqrt{\left(\frac{-2r}{u^2+p+\frac{q}{u}}+\frac{1}{4}u^2\right)}$, et $x=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2u}\right)}$, quae eruto valore u ex aequatione cubica deriuata, et hic ſubſtituto, deſignabunt quatuor radices aequationis propoſitae.

184. *Coroll.* 4. Hinc autem poſſet ſuſpicari tiro omnes quatuor aequationis propoſitae radices non poſſe vnica formula

exhiberi, verum cum x sit radix quadrata oriunda e resolutione aequationis parem semper dimensionem habentis, x necessario habet duos valores in singulis illis expressionibus, ac proinde quaelibet earum expressionum potest designare quatuor radices, ex hoc pacto scribi

$$x = \mp\frac{1}{2}u \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}u^2 \frac{-2r}{u^2 + p \pm \frac{q}{u}}\right)}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}u \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2u}\right)}$$

quas quidem duas expressiones easdem prorsus esse adparebit, si inuentus valor u in iisdem substituatur.

185. *Coroll.* 5. Cumque secunda expressio simplicior sit, ea eligenda est ad quatuor radices datae aequationis designandas. Sunt autem quatuor valores generales x, quas ea expressio simul exhibet, sequentes.

$$x = \frac{1}{2}u + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2u}\right)}$$

$$x = \frac{1}{2}u - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2u}\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2}u + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2u}\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2}u - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2u}\right)}$$

186. *Coroll.* 6. Quia vero ex aequatione cubica deriuata diuersi valores u possunt erui, dubitari potest, an quocunque eorum in his quatuor formulis substituto, semper iidem prodeant valores radicum x. Eosdem autem prodire sic ostendimus. Quicunque valor u substituatur in formula secunda num. 184 priores quatuor simul exhibente, quatuor valores x per eandem exhibiti semper repraesentari poterunt per $a+b$, $a-b$, $-a+c$, $-a-c$, seu quatuor radices aequationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ poterunt exhiberi per $x-a-b$, $x-a+b$, $x+a-c$, $x+a+c$, designan-

te a partem radicum $\frac{1}{2}u$, b partem $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2u}\right)}$, c partem $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2u}\right)}$: quare has quatuor radices in se ducendo habebitur aequatio

$$\left.\begin{matrix}x^4-2a^2\\-b^2\\-c^2\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}-2ab^2\\+2ac^2\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+a^4\\-a^2b^2\\-a^2c^2\\+b^2c^2\end{matrix}\right\}=0.$$

qua cum generali $x^4+px^2+qx+r=0$ collata erit $p=-2a^2-b^2-c^2$, $q=-2ab^2+2ac^2$, $r=a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2$, quibus valoribus in deriuata cubica (180) substitutis erit

$$\left.\begin{matrix}u^6-4a^2\\-2b^2\\-2c^2\end{matrix}\right\}u^4\left.\begin{matrix}+8a^2b^2\\+8a^2c^2\\+b^4\\-2b^2c^2\\+c^4\end{matrix}\right\}u^2\left.\begin{matrix}-4a^2b^4\\+8a^2b^2c^2\\-4a^2c^4\end{matrix}\right\}=0$$

cuius radices sunt $u=\pm 2a, \pm b\pm c, \pm b\mp c$, quarum si quaelibet substituatur vna cum valoribus p et q in quatuor illis formulis (158), semper eruentur iidem quatuor valores x, nempe $a+b$, $a-b$, $-a+c$, $-a-c$. Patet ergo quamlibet e radicibus aequationis cubicae deriuatae sui substitutione easdem semper exhibere radices aequationis propositae.

187. *Coroll.* 7. Ex his rursus adparet aequationis gradus quarti radices vel omnes esse reales, vel omnes imaginarias; vel duas reales, et duas imaginarias: cum enim omnes quatuor possint exprimi vnica formula (184): nequeunt earum vllae aliae fieri combinationes.

188. *Coroll.* 8. Et quoties duae radices reales, duae imaginariae sunt, aequatio cubica deriuata semper potest resolui

per

per Cardani formulas (162), ac proinde reſolui poteſt etiam aequatio, cuius illa deriuata eſt. Si vero radices vel omnes reales, vel omnes imaginariae ſint, cubica deriuata eo modo reſolui haud poteſt. Ratio vtriuſque eſt, quia aequatio cubica deriuata generalis (180) componitur ex hiſce tribus $u^2 - 4a^2$, $u^2 - b^2 - 2bc - c^2$, $u^2 - b^2 + 2bc - c^2$; atqui ſi duarum quantitatum b et c vna tantum ſit imaginaria, duae poſteriores radices, ſeu aequationes componentes imaginariae ſunt, adeoque aequatio illa cubica per Cardani formulas reſolui poteſt (165): at ſi quantitates b et c ambae reales ſint, vel ambae imaginariae, tres ſuperiores radices omnes reales ſunt, et hinc aequatio deriuata cubica caſum inuoluit irreducibilem (167).

189. *Probl. Reſoluere aequationes quarti gradus ope deriuatae cubicae, et duarum ſubſidiariarum ſecundi gradus.*

Reſol. Data aequatio ſublato termino ſecundo conferatur cum formula generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, ac eruantur valores quantitatum p, q, r, quibus in aequatione deriuata cubica generali (180) ſubſtitutis, habebitur cubica ſpecialis aequationis propoſitae, cuius reſolutio exhibebit valorem quantitatis u, qui valor vna cum inuentis p, q, r ſubſtituatur in ſubſidiariis generalibus (183), obtinebuntur duae aequationes ſecundi gradus propoſitam componentes, quarum proinde radices exhibebunt radices propoſitae (22).

190. *Coroll.* Quod ſi valores inuenti u, p, q immediate ſubſtituantur in quatuor formulis radicum generalibus (185), immediate obtinebuntur quatuor radices aequationis propoſitae.

Exempla.

I. Sit $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$; erit $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$, quibus valoribus in cubica deriuata generali $u^6 + 2pu^4$

$+p^2u^2-4ru^2-q^2=0$ subſtitutis erit $u^6-34u^4+313u^2-400=0$, quae aequatio poteſt vel reduci ad formam cubicam (180), atque ita reſolui (173); vel poteſt eiuſdem reſolutio immediate tentari (181). Et quidem inter diuiſores quantitatis q occurrit 4, cuius quadratum 16 eſt eiuſmodi, vt aequatio accurate diuidi poſſit per u^2-16: quare $u^2=16$, $u=4$; ſi ergo valores inuenti u, p, q, r ſubſtituantur in ſubſidiariis generalibus $x^2+ux+\frac{2r}{u^2+p+\frac{q}{u}}=0$, et $x^2-ux+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2u}=0$, obtinebuntur aequationes ſubſidiariae ſpeciales aequationem propoſitam componentes $x^2+4x+2=0$, et $x^2-4x-3=0$, quarum radices $-2\pm\sqrt{2}$, et $2\pm\sqrt{7}$ exhibent radices aequationis propoſitae. Eaedem radices immediate obuenient, ſi in quatuor generalibus radicum formulis (185) valores u, p, q immediate ſubſtituantur.

II. Sit $x^4-12x^3+12x-3=0$, erit $p=-12$, $q=12$, $r=-3$, quibus valoribus in cubica deriuata ſubſtitutis erit $u^6-24u^4+156u^2-144=0$, ſeu faciendo $u^2=y$, erit $y^3-24y^2+156y-144=0$, quae aequatio poteſt exacte diuidi per $y-12$; hinc $y=12=u^2$, adeoque $u=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$: ſi ergo valores u, p, q, r in duabus ſubſidiariis ſubſtituantur, erunt $x^2+2x\sqrt{3}-\sqrt{3}$, et $x^2-2x\sqrt{3}+\sqrt{3}$ aequationes propoſitam componentes, e quibus eruitur (130) $x=\pm\sqrt{(3+\sqrt{3})}-\sqrt{3}$, et $x=\pm\sqrt{(3-\sqrt{3})}+\sqrt{3}$, quae ſunt radices aequationis propoſitae. Eaedem radices immediate obuenient, ſi in generalibus radicum formulis (185) valores u, p, q ſubſtituantur.

III. Sit $x^4+x^2+2x+6=0$, erit $p=1$, $q=2$, $r=6$, quibus valoribus in deriuata cubica ſubſtitutis erit $u^6+2u^4-23u^2-4=0$, ac faciendo $u^2=y$, erit $y^3+2y^2-23y-4=0$, quae aequatio cum diuidi poſſit per $y-4$, erit $y=4=u^2$, et hinc

$u=2$: si ergo valores inuenti u, p, q, r in subsidiariis generalibus substituantur, erunt x^2+2x+2, et x^2-2x+3 aequationes propositam componentes, quarum radices $-1\pm\sqrt{-1}$, et $1\pm\sqrt{-2}$ exhibent quatuor radices aequationis propositae, quae immediate obuenirent, si in generalibus radicum formulis (185) valores u, p, q substituerentur, quod quidem hactenus monuisse sufficiat,

IV. Sit $x^4+70x^2-3744x+27993=0$, erit $p=70$, $q=-3744$, $r=27993$, quibus valoribus in cubica deriuata substitutis erit $u^6+140u^4-1070728u^2-14017536=0$, seu faciendo $u^2=y$, erit $y^3+140y^2-1070728y-14017536=0$. Iam inter diuisores valoris q occurrit 18, cuius quadratum 324 soluit hanc aequationem cubicam diuisibilem per $y-324$: ergo $y=u^2=324$, et $u=18$: quare si in aequationibus subsidiariis generalibus valores inuenti u, p, q, r substituantur, erunt $x^2+18x+301$, et $x^2-18x+93$ aequationes propositam componentes, quarum radices $-9\pm\sqrt{-220}$, et $9\pm\sqrt{-12}$ sunt radices propositae.

V. Sit $y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0$. Vt secundus terminus tollatur, fiat $y=x-4$, erit factis substitutionibus $x^4+3x^2-52x+48=0$, vbi $p=3$, $q=-52$, $r=48$, quibus valoribus substitutis erit eiusdem cubica deriuata $u^6+6u^4-183u^2-2704=0$, quae vt transformetur in aliam gradus tertii carentem secundo termino, fiat $u^2=t-2$, erit factis substitutionibus $t^3-195t-2322=0$, cuius radix ex formula Cardani (162) est $t=\sqrt[3]{(1161+\sqrt{1073296})}+\sqrt[3]{(1161-\sqrt{1073296})}=\sqrt[3]{(1161+1036)}+\sqrt[3]{(1161-1036)}=\sqrt[3]{2197}+\sqrt[3]{125}=18$: ergo $u^2=t-2=16$, et $u=4$. Si iam valores inuenti u, p, q, r in subsidiariis generalibus substituan-

tur, erunt $x^2+4x+16$, et x^2-4x+3 aequationes componentes aequationem transformatam $x^4+3x^2-52x+48=0$, adeoque earundem radices $-2\pm\sqrt{-12}$, et $2\pm\sqrt{(-3+4)}=2\pm 1$ erunt radices compositae; cumque posuerimus $y=x-4$, erit $y=-6\pm\sqrt{-12}$, et -2 ± 1. Poterat hoc exemplum resolui etiam quaerendo eiusdem diuisores vnius dimensionis $y+1$, et $y+3$ (124); aut duarum dimensionum y^2+4y+3, et $y^2+12y+48$ (126): poterat item valor u inueniri, quaerendo diuisorem cubicae deriuatae u^3-16 (181).

VI. Sit $x^4-6x^2+8x-1=0$, erit $p=-6$, $q=8$, $r=-1$, quibus valoribus substitutis erit eiusdem cubica deriuata $u^6-12u^4+40u^2-64=0$, quae vt reducatur ad tertium gradum, ac secundo termino careat, fiat $u^2=y+4$, erit factis substitutionibus $y^3-8y-32=0$, e qua ope formulae Cardani obtinetur

$$y=\sqrt[3]{\left(16+\sqrt{\frac{6400}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(16-\sqrt{\frac{6400}{27}}\right)}$$
$$=\sqrt[3]{\left(16+\frac{80}{3\sqrt{3}}\right)}+\sqrt[3]{\left(16-\frac{80}{3\sqrt{3}}\right)}$$
$$=2\sqrt[3]{\left(\frac{6\sqrt{3}+10}{3\sqrt{3}}\right)}+2\sqrt[3]{\left(\frac{6\sqrt{3}-10}{3\sqrt{3}}\right)}:$$

est autem radix cubica ex $3\sqrt{3}=\sqrt{3}$, et ex $6\sqrt{3}+10=1+\sqrt{3}$, ac ex $6\sqrt{3}-10=-1+\sqrt{3}$: ergo $y=\frac{2+2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4$: cum ergo posuerimus $u^2=y+4$, erit $u^2=8$, $u=\sqrt{8}$. Si iam in formulis radicum generalibus (185) valores u, p, q inuenti substituantur, obtinebuntur radices aequationis propositae sequentes

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})}$$
$$x=\sqrt{2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})}$$
$$x=-\sqrt{2}+\sqrt{(1+\sqrt{2})}$$
$$x=-\sqrt{2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})}$$

Poterat inueniri u etiam diuidendo aequationem cubicam deriuatam per $u^2 - 8$ (181): ſed maluimus tironis exercitandi cauſſa duo haec poſtrema exempla adhibita Cardani formula reſoluere.

Scholion. Si valor u obueniat irrationalis admodum complicatus, expreſſiones radicum aequationis propoſitae obuenient multo etiam magis complicatae, vt adeo problema, ad quod ſoluendum data aequatio ordinata eſt, conſtructione potius geometrica ſit expediendum. E. g. ſi proponatur aequatio $x^4 - 6x^2 + 12x - 10 = 0$, erit $p = -6$, $q = 12$, $r = -10$, quibus valoribus ſubſtitutis erit eiuſdem cubica deriuata $u^6 - 12u^4 + 76u^2 - 144 = 0$, ſeu faciendo $u^2 = z$ erit $z^3 - 12z^2 + 76z - 144 = 0$, quae cum nullum admittat diuiſorem rationalem, per formulam Cardani eſt reſoluenda. Igitur vt tollatur ſecundus terminus, fiat $z = y + 4$, erit factis ſubſtitutionibus $y^3 + 28y + 32 = 0$, vnde per Cardani formulam eruitur $y = \sqrt[3]{\left(-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-16 - \sqrt{\frac{28864}{27}}\right)}$; atqui poſuimus $z = y + 4$; erit ergo $z = 4 + \sqrt[3]{\left(-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-16 - \sqrt{\frac{28864}{27}}\right)}$: cum què ſit $u^2 = z$, erit $u = \sqrt{\left(4 + \sqrt[3]{\left(-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-16 - \sqrt{\frac{28864}{27}}\right)}\right)}$, quo valore in quatuor illis radicum formulis generalibus (185) ſubſtituto, quis non videt obuenturas eſſe formulas inextricabiles?

CAPVT V.

De variis ad radices adproximandi Methodis.

191. Dum aequationes tertii gradus, ad quas reduci vidimus etiam aequationum quarti gradus reſolutiones, nullum admittunt diuiſorem rationalem, ſi in iiſdem quantitas $\frac{1}{27}q^3$ negati-

ua ſit, et maior, quam $\frac{1}{4}r^2$, radicum realium, quales tunc aequatio habet, valores accurati nulla methodo hactenus inuenta poſſunt determinari, propter imaginareitatem ſcilicet, quam tunc earundem expreſſiones inuoluunt: quare confugiendum erit ad adproximationes, quae quidem ope ſerierum infinitarum ſolent obtineri. Quia tamen ſeries illae multis in caſibus admodum lente conuergunt, alias adproximandi methodos proferemus.

192. *Probl. Ad aequationis irreducibilis radices adproximare.*

Reſol. Cum huiuſmodi caſus tunc ſolum occurrat, cum termini tertii coefficiens q negatiuus eſt (164, 165), fit aequatio generalis $x^3 - qx + r = 0$ caſum inuoluens irreducibilem, et fiat $x = my$, erit facta ſubſtitutione $y^3 - \frac{qy}{m^2} + \frac{r}{m^3} = 0$, adeoque $y^3 - \frac{qy}{m^2} = \frac{-r}{m^3}$. Fiat porro indeterminata $m = -\sqrt{q}$ ſi r eſt quantitas poſitiua vel $m = \sqrt{q}$ ſi eſt negatiua, erit $y^3 - y$ quantitas poſitiua e. g. $= u$, et aequatio hanc habebit formam $y^3 - y = u$, vel $y^3 - y - u = 0$, vbi erit $q = -1$, $r = -u$: cum ergo in caſu irreducibili ſit $\frac{1}{4}r^2 < \frac{1}{27}q^3$, debet hic eſſe $\frac{1}{4}u^2 < \frac{1}{27}$, ſeu $u < \sqrt{\frac{4}{27}}$. Debet item radix vna eſſe poſitiua maior vnitate, ſed minor quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$: ſi enim eſſet $y > \sqrt{\frac{4}{3}}$, foret u, ſeu $y^3 - y > \sqrt{\frac{4}{27}}$, adeoque caſus non eſſet irreducibilis.

Sit igitur $y = 1 + a$, valore hoc in aequatione $y^3 - y = u$ ſubſtituto erit $2a + 3a^2 + a^3 = u$, vbi cum a ſemper ſit minor, quam $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, ſeu quam $0,155$, eiuſdem cubus $0,0037$ erit exiguus; adeoque eodem neglecto prior aequatio abit in $2a + 3a^2 = u$, qua reſoluta (130) obueniet $a = \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}u\right)} - \frac{1}{3}$, ſeu

partem radicalem reducendo ad denominatorem $3 = \sqrt{9}$, fiat $a = \frac{\sqrt{(1+3u)}-1}{3}$, et hinc $y = 1+a = \frac{2+\sqrt{(1+3u)}}{3}$: si ergo valor inuentus y ducatur in m, habebitur valor adproximans ad valorem x quaesitum.

193. *Coroll.* Siquis scire velit errorem e contemtu cubi a^3 oriundum, assumat casum, in quo cubus ille a^3 est omnium maximus, nempe vbi $1+a$ est $= \sqrt{\frac{4}{3}}$, quod nunquam potest euenire, vt diximus, in casu irreducibili: erit tunc $u = y^3 - y = (1+a)^3 - (1+a) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} - \frac{3}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, adeoque $y = \frac{2+\sqrt{(1+\frac{4}{9})}}{3}$ loco veri valoris $\sqrt{\frac{4}{3}}$, quae duae quantitates inter se non differunt, nisi circiter millesima parte vnitatis: ergo in casu quouis irreducibili hic error adhuc minor est.

Exempla.

I. Quaeratur radix aequationis $y^3 - y = \frac{1}{3}$. Substituendo $\frac{1}{3}$ pro u erit $y = \frac{2+\sqrt{(1+3u)}}{3} = \frac{2+\sqrt{(1+\frac{1}{3})}}{3} = \frac{2+\sqrt{2}}{3} = 1,138$, qui valor verum valorem parte vnitatis millesima non superat; nam si poneretur $y = 1,137$, foret vero valore minor, vti calculus facile ostenderet.

II. Quaeratur radix aequationis $x^3 - 13x + 5 = 0$. Ob valorem $r = 5$ positiuum fiat $m = -\sqrt{q} = -\sqrt{13}$, erit $u = -\frac{r}{m^3} = \frac{1-5}{-13\sqrt{13}} = \frac{5}{13\sqrt{13}}$, et $x = -y\sqrt{13}$; unde aequatio $y^3 - y = u$ abibit in $y^3 - y = \frac{5}{13\sqrt{13}}$: quare in formulae y valore ponendo $\frac{5}{13\sqrt{13}}$ pro u, erit $y = \frac{2+\sqrt{(1+\frac{15}{13\sqrt{13}})}}{3}$, adeoque $x = -y\sqrt{13} = \frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{13}}{3} + \frac{15}{\sqrt{13}}) = -3,784$ circiter.

III. Quaeratur radix aequationis $x^3 - 9x + 10 = 0$; erit $m = -3$, adeoque $x = -3y$; quo valore ſubſtituto abit aequatio $y^3 - y = u$ in $y^3 - y = \frac{10}{27}$: quare pro u ponendo $\frac{10}{27}$, erit $y = \frac{2 + \sqrt{(1 + \frac{10}{9})}}{3}$, adeoque $x = -3y = \frac{-6 - 3\sqrt{(1 + \frac{10}{9})}}{3} = -2 - \sqrt{\frac{19}{9}} = -2 - \frac{1}{3}\sqrt{19} = -3,455$ circiter.

IV. Quaeratur radix aequationis $x^3 - 12x - 12 = 0$, erit $m = \sqrt{12}$, adeoque $x = ym = y\sqrt{12}$, $u = \frac{12}{12\sqrt{12}}$; hinc $y = \frac{2 + \sqrt{(1 + \frac{12}{4\sqrt{12}})}}{3}$, ac proinde $x = \frac{2\sqrt{12} + \sqrt{(12 + \frac{12}{4})}}{3} = \frac{2\sqrt{12} + \sqrt{15}}{3} = 3,600$ circiter.

V. Quaeratur radix aequationis $x^3 - 30x + 36 = 0$, erit $m = -\sqrt{30}$, $x = -y\sqrt{30}$, $u = \frac{36}{30\sqrt{30}}$, adeoque $y = \frac{2 + \sqrt{(1 + 32)}}{3} = \frac{2 + \sqrt{(1 + \frac{108}{30\sqrt{30}})}}{3}$, et hinc $x = \frac{-2\sqrt{30} - \sqrt{(30 + \frac{108}{\sqrt{30}})}}{3} = -6,001$, quae radix a vera non differt, niſi vna milleſima parte vnitatis, cum vera radix ſit $= -6$, vti patebit ſubſtituenti.

194. *Probl. Ad eaſdem radices alia methodo adproximare.*

Reſol. Sit aequatio generalis inuoluens irreducibilem $x^3 + qx + r = 0$, erit $x^3 = -qx - r$, ac per x diuidendo $x^2 = -q - \frac{r}{x}$, adeoque $x = \sqrt{\left(-q - \frac{r}{x}\right)}$, vbi ſi pro x aſſumatur quiuis numerus cum ſigno contrario termini vltimi aequationis r, erit $\frac{r}{x}$ fractio negatiua, adeoque $-\frac{r}{x}$ poſitiua, et quia in caſu irreducibili quantitas q negatiua eſt (164, 165), erit $-q$ poſitiua, vnde et quantitas $-q - \frac{r}{x}$ poſitiua erit. Extracta ergo radice

ex

ex $-q-\frac{r}{x}$ habebitur iam nouus valor pro x, qui maior erit vero valore, si assumtus ille pro x fuit vero minor, et contra; si enim assumtus valor x est iusto minor, fractio $-\frac{r}{x}$, adeoque et quantitas $-q-\frac{r}{x}$ est iusto maior, vnde et radix eiusdem iusto maior est, et contra. Porro nouus hic valor x iam erit vero propior, errore in extractione radicis decrescente: quare si nouus hic valor in formula $x=\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}$ pro x substituatur, et operatio eadem quantum libuerit, repetatur, licebit ad valorem radicis quantumuis accedere.

Exempla.

I. Quaeratur, vt supra, radix aequationis $x^3-x-\frac{1}{3}=0$, erit $q=-1, r=-\frac{1}{3}$: assumatur pro x numerus 2, erit $-\frac{r}{x}=\frac{1}{6}$, et hinc $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{6}\right)}$, seu reducendo fractionem $\frac{1}{6}$ ad partes centesimas ope proportionis $6:1=100:16$, erit $x=\sqrt{1,16}=1,0$ proxime. Ponatur iterum $x=1,0$, erit $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)}$, seu reducendo fractionem $\frac{1}{3}$ ad partes millionesimas ope proportionis $3:1=100000:333333$, erit $x=\sqrt{1,333333}=1,138$ quam proxime, prorsus vt supra in exemplo 1.

II. Quaeratur, vt supra, radix aequationis $x^3-13x+5=0$, erit $q=-13, r=5$. Assumatur pro x numerus negatiuus -2 ob terminum vltimum r positiuum, erit $-\frac{r}{x}=\frac{5}{2}=2,50$, vnde $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{15,50}=3,9$ proxime. Fiat

iam $x=-3,9$, erit $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{\left(13+\frac{5}{3,9}\right)}=\sqrt{(13+1,282051)}=\sqrt{14,282051}=-3,779$ = discrepans a radice supra exemp. 2 reperta fere quinque millesimis vnitatis partibus.

III. Quaeratur, vt supra, radix aequationis $x^3-9x+10=0$, erit $q=-9$, $r=10$. Fiat $x=-2$, erit $-\frac{r}{x}=\frac{10}{2}=5$, adeoque $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{(9+5)}=\sqrt{14}=3,7$ proxime. Fiat rursus $x=-3,7$, erit $-\frac{r}{x}=\frac{10}{3,7}=2,702$, adeoque $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{11,702}=-3,420$ proxime, discrepans a radice supra exemp. 3 reperta fere viginti tribus millesimis vnitatis partibus. Quodsi ponatur $x=-1$, erit $-\frac{r}{x}=10$, adeoque $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{19}=-4,4$ proxime. Fiat rursus $x=-4,4$, erit $-\frac{r}{x}=\frac{10}{4,4}=2,27$, et hinc $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{11,27}=-3,35$. Fiat iterum $x=-3,35$, erit $-\frac{r}{x}=2,985$, adeoque $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{11,985}=-3,462$ discrepans a radice supra exemp. 3 reperta nouem circiter millesimis vnitatis partibus.

IV. Quaeratur, vt supra, radix aequationis $x^3-30x+36=0$, erit $q=-30$, $r=36$. Fiat $x=-5$, erit $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{\left(30+\frac{36}{5}\right)}=-6,099$. Fiat rursus $x=-6,099$, erit $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}=\sqrt{\left(30+\frac{36}{6,099}\right)}=\sqrt{35,902607}=-5,991$, quae a vera radice -6 differt nouem millesimis vnitatis partibus. Si fieret $x=-6$, foret $\sqrt{\left(-q-\frac{r}{x}\right)}$

$=\sqrt{\left(30+\frac{36}{6}\right)}=\sqrt{36}=-6$, quo pacto illico pateret deuentum esse ad radicem accuratam -6.

Scholion. Radix his methodis inuenta semper erit maxima, cum signum habeat contrarium vltimo aequationis termino (148). Inuenta autem vna quauis radice, reliquae facile innotescunt. Sit enim radix inuenta $=n$, erit reliquarum summa $=-n$, cum termino secundo deficiente summa omnium debeat esse $=0$ (32): et quia omnium productum est $=-r$ (26), erit reliquarum productum $=-\frac{r}{n}$: quare cum in aequatione reliquas duas radices continente coefficiens termini secundi debeat esse summa radicum cum signo contrario, ac terminus vltimus debeat esse factum e duabus illis radicibus cum signo proprio (26), erit aequatio illa $x^2+nx-\frac{r}{n}=0$: quare duae reliquae radices erunt $x=-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2+\frac{r}{n}\right)}$, adeoque ope huius formulae binae illae radices inuenientur.

Sed quoniam propositae adproximandi methodi propter crescentes decimalium notas in vlterioribus adproximationibus valde operosae sunt, proferemus aliam, cuius ope admodum cito obtinentur radices veris proximae.

195. *Probl. Ad easdem radices celerius adproximare.*

Resol. Postquam ope limitum, aut methodorum superiorum ad radicem aliquam aequationis sic accessum est, vt a valore vero non aberretur vna decima parte vnitatis, vel vna centesima, siquidem aequationis termini ingentes habeant coefficientes, valor vero proximus ponatur $=a$, et fractio, qua hic valor a vero deficit, fiat $=y$, erit verus valor $=a+y$, et y respectu a quantitas satis parua. Si iam in proposita aequatione pro inco-

gnita x ponatur $a+y$, ea transformabitur in aliam, quae reſolui poterit duplici hac methodo.

1) Omitti in eadem poterunt omnes ii termini, in quibus y adſurgit ad potentias prima altiores, cum ii termini reſpectu ceterorum ſatis exigui ſint, atque ita reducetur aequatio ad gradum primum, et facile eruetur valor y, qui additus valori a exhibebit valorem radicis x vero iam propiorem. Nouus hic valor ponatur iterum $=a$, et differentia a vero valore $=y$, reſtituaturque idem calculus, quoties libuerit, accedi eo pacto poterit ad verum valorem in infinitum.

2) Si in transformata aequatione relinquantur etiam ii termini, in quibus occurrit y^2, neglectis ceteris altiores eiuſdem y potentias continentibus, obtinebitur aequatio ſecundi gradus perfacilem habens reſolutionem, e qua erutus valor y, et adiectus valori a dabit valorem radicis vero longe propiorem, quemadmodum e ſequentibus exemplis elucebit.

196. *Coroll.* Ne vero moleſta accidat quantitatis $a+y$ repetita ſubſtitutio, ac aequationis iterata transformatio, adponemus hic formulam, cuius ope illico adpareat, quinam termini facta valoris $a+y$ ſubſtitutione ſint retinendi. Sit quiuis aequationis propoſitae terminus $=bx^m$, in quo pro x ſubſtitui debeat valor $a+y$; ex formula generali binomii ad quamuis potentiam euehendi erit $bx^m=b(a+y)^m=ba^m+mba^{m-1}y+\frac{m.m-1}{1.2}ba^{m-2}y^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}ba^{m-3}y^3$ etc. cuius ſeriei duo tantum priores termini ſunt retinendi in prima methodo, vel tres primi in ſecunda, in qua ſcilicet retinentur etiam termini potentiam y^2 continentes.

Exempla.

I. Sit aequatio, vt ſupra, $x^3-x-\frac{1}{3}=0$, ponendo $a+y$ pro x, erit prima methodo

$$a^3+3a^2y=0 \text{ et hinc } y=\frac{a^3-a-\frac{1}{3}}{-3a^2+1}.$$

$$\begin{array}{l} -a \quad -y \\ -\frac{1}{3} \end{array}$$

Inuenimus autem ſupra radicem verae proximam 1,138, quare hunc valorem pro a ponendo erit $y=\frac{1,473760072-1,138-0,333333333}{-3,885132+1}$ $=\frac{0,002426739}{-2,885132}=-0,000841$: quare $x=a+y=1,138-0,000841=1,137159$. Quodſi methodo ſecunda retinere velimus etiam illos terminos, in quibus eſt y^2, ponendo $a+y$ pro x erit

$$a^3+3a^2y+3ay^2=0 \text{ et hinc pro } a \text{ ſubſtituendo } 1,138$$

$$\begin{array}{l} -a \quad -y \\ -\frac{1}{3} \end{array}$$

erit $0,002426739+2,885132y+3,414y^2=0$, vnde obtinetur $y=-0,000841836$, adeoque $x=a+y=1,138-0,000841836=1,137158164$, qui valor priore eſt multo propior.

II. Sit aequatio $x^3-30x+36=0$, ponendo $a+y$ pro x erit prima methodo

$$a^3+3a^2y=0, \text{ et hinc } y=\frac{a^3-30a+36}{-3a^2+30}.$$

$$\begin{array}{l} -30a-30y \\ +36 \end{array}$$

Inuenimus autem ſupra (87) radicem huius aequationis proxime minorem eſſe 4, 5; quare hunc valorem pro a ſubſtituendo erit $y=\frac{-7,875}{-30,75}=0,25$: ergo $x=a+y=4,5+0,25=4,75$. Fiat rurſus $a=4,75$, erit $y=\frac{0,671875}{-37,6875}=-0,01782$, vnde $x=a+y=4,75-0,01782=4,73218$, et ſic porro.

Quodſi methodo ſecunda retinere velimus etiam illos terminos, in quibus occurrit y^2, ponendo $a+y$ pro x erit

$$a^3+3a^2y+3ay^2=0, \text{ et hinc pro } a \text{ ſubſtituendo } 4,5$$
$$-30a-30y$$
$$+36$$

erit $-7,875+30,75y+13,5y^2=0$, vnde obueniet $y=0,232$; quare $x=a+y=4,732$. Quodſi calculus idem inſtauretur, et ponatur $a=4,732$, reperietur $y=0,00205081$, et hinc $x=a+y=4,73205081$, et ſic porro.

III. Sit aequatio $x^3+2x^2-23x-70=0$, ponendo $a+y$ pro x erit prima methodo

$$a^3+3a^2y=0, \text{ et hinc } y=\frac{a^3+2a^2-23a-70}{-3a^2-4a+23}.$$
$$+2a^2+4ay$$
$$-23a-23y$$
$$-70$$

Eſt autem radix huius aequationis vera minor in numeris integris $=5$; quare valorem hunc pro a ponendo erit $y=\frac{125+50-115-70}{-75-20+23}=\frac{10}{72}=0,1$: ergo $x=a+y=5,1$. Rurſus pro a ſubſtituatur valor radicis inuentus $5,1$, erit $y=\frac{132,651+52,02-117,3-70}{-78,03-20,4+23}=\frac{2,629}{75,430}=0,0349$; vnde $x=a+y=5,1349$, et ſic deinceps. Quodſi methodo ſecunda retinere libeat etiam illos terminos, in quibus occurrit y^2, ponendo $a+y$ pro x erit

$$a^3+3a^2y+3ay^2=0$$
$$+2a^2+4ay+2y^2$$
$$-23a-23y$$
$$-70$$

ſeu pro a ponendo 5, erit $-10+72y+17y^2=0$, vnde elicitur $y=0,13529411$, adeoque $x=a+y=5,13529411$.

IV. Sit aequatio $x^3 - 15^2 + 63x - 50 = 0$, ponendo $a+y$ pro x erit prima methodo

$$a^3 + 3a^2y = 0, \text{ et hinc } y = \frac{a^3 - 15a^2 + 63a - 50}{-3a^2 + 30a - 63}.$$

$$\begin{array}{l} -15a^2 - 30ay \\ +63a + 63y \\ -50 \end{array}$$

Eſt autem aequationis propoſitae radix proxime minor in numeris integris $= 1$; quare hoc valore pro a ſubſtituto erit $y = \frac{1}{136} = 0,027$, adeoque $x = a+y = 1,027$. Si libeat retinere etiam illos terminos, in quibus occurrunt y^2 et y^3 erit

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 = 0 \\ -15a^2 - 30ay - 15y^2 \\ +63a + 63y \\ -50 \end{array}$$

ſeu pro a ponendo 1 erit $-1 + 36y - 12y^2 + y^3 = 0$, et hinc $y = \frac{1}{36 - 12y + y^2}$, ac in denominatore pro y ſubſtituendo valorem ſupra inuentum $\frac{1}{36}$ erit $y = \frac{1}{36 - 12.\frac{1}{36} + \frac{1.1}{36.36}} = \frac{1296}{46225} = 0,02803$, adeoque $x = a+y = 1,02803$, et ſic porro.

Scholion. Poſtrema haec methodus adproximandi ſuppeditat formulam quamdam generalem, ſeruientem pro ſimplici radicum extractione. Sit enim numerus quiſque N, e quo radix exponentis m extrahi debeat: ponamus radicem eiuſdem proximam methodo communi inuentam in numeris integris eſſe $= a$, veram autem radicem eſſe $= a+y$; eleuando hanc radicem ad potentiam exponentis m erit $a^m + ma^{m-1}y + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}y^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}y^3$ etc. $= N$, ac ob altiores potentias fractionis y admodum exiguas retinendo duos tantum primos terminos erit $a^m + ma^{m-1}y = N$, et hinc

$y=\frac{N-a^m}{ma^{m-1}}$: retentis vero tribus terminis erit $y=\frac{N-a^m}{ma^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}y}$, seu pro y ponendo $\frac{N-a^m}{ma^{m-1}}$, erit $y=\frac{N-a^m}{ma^{m-1}+\frac{m^2-m}{2a}a^{m-1}.\left(\frac{N-a^m}{ma^{m-1}}\right)}$, id est $y=\frac{N-a^m}{ma^{m-1}+\frac{m-1}{2a}.(N-a^m)}$, ac breuitatis cauſſa ponendo $N-a^m=n$, et tam numeratorem, quam denominatorem ducendo in a, erit $y=\frac{an}{ma^m+\frac{m-1}{2}.n}$

Vt iam inuentae formulae vſus adpareat in radicum extractionibus, quearatur e. g. radix cubica numeri 2, erit $N=2$, $a=1$, $m=3$, $n=1$, vnde $y=\frac{an}{ma^m+\frac{m-1}{2}.n}=\frac{1}{4}=0,25$, et hinc $a+y=1,25$. Fiat rurſus $a=1,25$, erit factis ſubſtitutionibus $y=0,009921$, adeoque $a+y+1,25+0,009921=1,259921$. Si rurſus ponatur $a=1,259921$, ac fiat eiuſdem ſubſtitutio, obueniet valor radicis multo propior, quae operatio repeti poterit, quoties libuerit, aut calculi accuratio poſtulauerit. Eadem eſt procedendi methodus pro quouis alio numero propoſito.

Finis Libri Primi.

LI-

LIBER SECVNDVS

De Geometricis Aequationum Reſolutionibus.

PROLEGOMENON.

197.

Quemadmodum lineae, ac figurae quaeuis geometricae notis algebraicis exprimi, ita viciſſim expreſſiones algebraicae lineis, ac figuris geometricis repraeſentari poſſunt: ac proinde ſicuti algebra ad geometriam, ita viciſſim geometria ad algebram adplicari ſolet. Nimirum ad geometriam adplicamus algebram, cum problema geometricum adhibitis notis algebraicis reſoluimus: ad algebram vero adplicamus geometriam, dum problema reſolutum conſtruimus, ſeu inuentas algebraicas expreſſiones lineis repraeſentamus.

198. Problema autem ad conſtruendum propoſitum vel eſt *determinatum*, quod ſcilicet definitum habet ſolutionum numerum; vel *indeterminatum*, innumerabiles admittens ſolutiones.

Fig. 9. E. g. Determinatum erit problema, ſi in diametro circuli AD quaeratur punctum F, in quo erecta ordinata FH aequatur radio; vnicum enim diametri punctum, nempe medium, ſatis problemati faciet. At ſi quaeratur in eadem punctum aliud C, vbi adplicata ordinata CB ſit media proportionalis inter ſegmenta diametri AC et CD, problema erit indeterminatum, cum innumera, hoc eſt, omnia diametri puncta quaeſtioni reſoluendae apta ſint.

Indeterminatum item erit problema, ſi data recta quapiam AD quaeratur extra eandem punctum B, e quo ad A et D ductae rectae BA et BD comprehendant in B angulum rectum; cum infinita ſint eiuſmodi puncta, nempe tot, quot ſunt in peripheria circuli diametro AD deſcripti, duobus duntaxat A et D exceptis, in quibus alterum anguli crus euaneſcit, alterum in ipſam diametrum AD recidit.

199. Porro in problemate quouis geometrico quaeritur aut punctum aliquod, aut linea, aut ſuperficies, aut denique ſolidum: quorum omnium determinatio pendet a quantitate, et poſitione vnius, vel plurium linearum; vt adeo omne problema geometricum ad lineas demum reducatur.

200. Dum problema aliquod geometricum reſoluendum eſt, 1) rectae quaedam dantur tantum poſitione, 2) quaedam tantum magnitudine, 3) quaedam et poſitione, et magnitudine, 4) quaedam neque poſitione, neque magnitudine. Primarum ſitus eſt conſtans, ſed magnitudo variabilis, qualis eſt tangens ad datum in peripheria curuae punctum ducenda, aut recta datae parallela per datum punctum tranſiens. In ſecundis magnitudo con-

ſtans eſt, at ſitus mutabilis, vt eſt diameter in circulo. Tertiarum tam ſitus, quam magnitudo conſtans eſt, qualis tangens eſt e dato puncto ad datum in curuae peripheria punctum ducenda, aut radius ad datam circuli diametrum perpendicularis. Quartarum denique nec ſitus, nec magnitudo eſt conſtans, quae idcirco *variabiles*, vel *indeterminatae* adpellantur, vt ſunt ordinatae curuarum.

201. In problematum reſolutionibus quantitates datae primis, quaeſitae poſtremis alphabeti literis deſignantur. Et quia ſatis eſt vnum rectae extremum indeterminatum eſſe, vt tota linea indeterminata ſit, ſemper licebit alterum eius extremum ponere fixum, et facta denominatione tractare eandem tanquam cognitam: atque inde innoteſcent aliae ab eadem pendentes.

E.g. Poſita diametro $AD = a$, ſi abſciſſa variabilis $AC = x$ determinetur, neceſſario innoteſcet $CD = a - x$ ab eadem pendens.

202. In determinandis lineis magna opus erit circumſpectione, vt ſcilicet deſignentur iuxta illas, quas ad ſe inuicem habent relationes.

E. g. Si in triangulo rectangulo ABD latus AD ponatur $= a$, $AB = b$, non debet latus tertium BD diſtincta litera deſignari, ſed ponendum eſt $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$, vt hoc pacto exprimatur laterum AB et BD relatio, ſeu conditio dati anguli recti ABD.

Item in ſemicirculo ſi detur diameter $AD = 2a$, abſciſſa $AC = b$, tametſi his datis detur etiam recta CD, et ordinata CB, neutra tamen debet diſtincta litera exprimi, ſed erit $CD = 2a - b$, et $CB = \sqrt{(2ab - b^2)}$, vt ſic indicetur rectam CB eſſe ordinatam circuli, ſeu mediam proportionalem inter ſegmenta diametri AC et CD.

203. In problematum conſtructione comparent interdum lineae quaedam, quae expreſſe non dantur, ſed e natura figurae, cuius ope problema conſtruitur, innoteſcunt.

E. g. Si in triangulo rectangulo ABD detur hypotenusa AD, et cathetus BD, datur hoc ipso ex natura figurae etiam alter cathetus $AB=\sqrt{(AD^2-BD^2)}$: ac vniuerse datis duobus quibusuis lateribus datur tertium. Datis item diametri segmentis $AC=a$, et $CD=b$, datur ex natura circuli perpendiculum $CB=\sqrt{ab}$.

204. In lineis, quarum ope problema resoluimus, eaedem plane obtinent operationes, quae in quantitatibus algebraicis. Nam 1) lineam lineae addi, vel demi posse perspicuum est. 2) In earundem multiplicatione factum plerumque non aliud est, quam recta quarta proportionalis ad vnitatem, et ad factores: quare assumta recta quapiam pro vnitate factum erit quarta proportionalis ad hanc rectam, et ad factores. 3) Cum item in diuisione diuisor sit ad diuidendum sicut vnitas ad quotum, si recta quaepiam pro vnitate sumatur, quotus erit recta quarta proportionalis ad diuisorem, diuidendum, et ad hanc rectam pro vnitate assumtam. 4) Denique vt lineae cuiuspiam radix per lineam repraesentetur, inter eam lineam, et aliam pro vnitate assumtam quaerenda est vna media proportionalis pro radice quadrata, duae pro radice cubica etc. E. g. vt lineae a radix quadrata per lineam exhibeatur, inter lineam a, et aliam quampiam pro vnitate assumtam quaeri debet media proportionalis x, eritque $x^2=a$, et linea $x=\sqrt{a}$.

205. Recta autem pro vnitate sumenda interdum vi problematis ipsius determinatur, vt si ad datas tres rectas quarta proportionalis quaeratur, vbi prima recta data sumenda erit pro vnitate. Quodsi in problemate vnica sit recta cognita, ea solet assumi pro vnitate, vt diameter in circulo, parameter in parabola. Siqua vero recta pro vnitate semel assumta est, ea deinceps in resolutione eiusdem problematis mutari non debet.

206. Lineae, ſuperficies, ac ſolida, quae problematum geometricorum reſolutiones ingredi ſolent, reapſe heterogeneae quantitates ſunt: quare vt pro homogeneis haberi queant, reduci debent omnes ad eandem dimenſionem, id quod obtinebitur multiplicando per vnitatem omnes terminos minorem habentes dimenſionem, vel diuidendo per eandem omnes terminos maiorem habentes dimenſionem toties, quoties opus eſt ad obtinendam eandem vbique dimenſionem.

E. g. Si occurrat expreſſio huiuſmodi $a^2b^2 - b$, vt termini euadant homogenei, ſupponi poteſt terminus a^2b^2 ſemel eſſe diuiſus per vnitatem, ac terminus $-b$ bis ductus in eandem: ita ambo hi termini tres habebunt dimenſiones; ſeu ſi ponatur $c = 1$, poterit poni $\frac{a^2b^2}{c} - bc^2$ ſine valoris mutatione.

207. Poſteaquam lineae rite deſignatae ſunt, tractentur cognitae et incognitae nullo diſcrimine; ſeu habeantur incognitae pro cognitis, impletiſque omnibus problematis propoſiti conditionibus eruatur aequatio.

E. g. Si proponatur diameter circuli AD media et extrema ratione ſecanda in puncto C, cogitetur factum iam eſſe, quod petitur, ſitque $AD = a$, $AC = x$, erit $CD = a - x$, ac ex problematis conditione $AD : AC = AC : CD$, ſeu $a : x = x : a - x$, vnde enaſcitur haec aequatio $a^2 - ax = x^2$, ſiue $x^2 + ax - a^2 = 0$, cuius conſtructione ſoluetur problema propoſitum.

208. Si natura problematis id ſecum ferat, deſcribatur figura omnes eiuſdem conditiones repraeſentans; deinde ex figurae deſcriptae, ac problematis conditionibus formentur, ſi fieri poſſit, tot aequationes, quot ſunt lineae incognitae. Quodſi lineae in figura deſcripta contentae non ſufficiant ad obtinendas conuenientes denominationes, aut quantitates eruendae ae-

quationi neceſſarias, producantur, vel ducantur lineae neceſſariae, praeferendo ſemper perpendiculares, ac parallelas, quae triangula generant ſimilia. Interdum ducendi erunt in eundem finem circuli, tangentes, radii etc. quae ex vſu, et adiunctis problematum erunt diſcernenda.

Fig. 10. E. g. Si datis poſitione duabus rectis AB et AC ex dato puncto D ducenda ſit recta DB ea lege, vt triangulum AFB fiat aequale plano dato c^2: cogitetur ducta iam eſſe recta DB, et ex F demiſſum perpendiculum FR, ponaturque $AB=x$, erit ex problematis conditione $\frac{1}{2}FR.x=c^2$, vbi euidens eſt e ſolis lineis hactenus ductis non poſſe erui valorem perpendiculi FR ad conſtructionem problematis neceſſarii. Quare e puncto D ducenda eſt recta DG parallella ad AC occurrens rectae AB productae alicubi in G, item recta DH parallela ad FR; innoteſcent hoc ipſo rectae AG et DH, ob data ſcilicet puncta A et D, ac datam rectarum AB et AC poſitionem. Fiat ergo $AG=a$, $DH=b$: ſimilia erunt triangula GDH et AFR, item BDG et BFA: erit ergo GB: AB=GD: AF=DH: FR, ſeu $a+x:x=b:FR$, vnde $FR=\frac{bx}{a+x}$, et hinc triangulum $AFB=\frac{bx^2}{2a+2x}=c^2$: quare inuenta recta AF habebitur punctum F, per quod ducta recta DB ſatis problemati faciat.

209. Si in problematis cuiuſpiam reſolutione agatur de angulis, ab angulorum proprietatibus tranſeundum erit ad proprietates linearum, quae problema ingrediuntur, vel ingredi poſſunt, vt aequatio congrua eliciatur. Quem in finem adhibentur interdum angulorum functiones, vti ſunt ſinus, tangentes etc. interdum aliae rectae cum angulis neceſſarium nexum habentes.

Fig. 11. E. g. Si ſuper data recta AB conſtrui debeat triangulum ABC, cuius quilibet angulus B et C duplus ſit anguli A, ſuppo-

natur id triangulum iam esse constructum, erit AB = AC ob angulos C et B ex hypothesi aequales. Cogitetur deinde ducta recta CD angulum ACB bifariam diuidens, erit angulus DCB = BAC, et hinc triangula ACB et DCB similia; vnde erit AB: BC = BC: BD, seu ob BC = CD = AD erit AB: AD = AD: BD: quare problema ab angulo traductum est ad rectam AB media et extrema ratione secandam in puncto D, quo peracto diuidatur segmentum BD bifariam in E, ac in E erigatur perpendiculum EC occurrens in C arcui BG radio AB descripto, et ad punctum illud C ex A et B ducantur rectae AC et BC, obtinebitur triangulum petitum ABC.

210. Interdum in problemate proposito nulla adest expressa conditio, e qua aequatio directa elici possit: quare methodus quaedam indirecta adhibenda erit in his casibus, curandum scilicet, vt ope diuersarum eiusdem quantitatis relationum duo diuersi eiusdem valores eruantur, ac deinde inter se conferantur.

E. g. Si dato triangulo aequicruro ABD circumscribendus sit circulus, nulla adparet aequatio, cuius constructione problema resoluendum sit. Fiat vero $AD = a$, $AB = BD = b$, ducaturque ex angulo B recta BH ad basim perpendicularis, item chorda AH, sitque $BH = x$. Similia erunt triangula ABH et ABC, adeoque BH: BA = BA: BC, seu $x : b = b$: vnde $BC = \frac{b^2}{x}$; cum ergo sit $AC = \frac{1}{2}a$, erit $AB^2 = BC^2 + AC^2 = \frac{b^4}{x^2} + \frac{1}{4}a^2$; est vero idem $AB^2 = b^2$, ergo $\frac{b^4}{x^2} + \frac{1}{4}a^2 = b^2$, cuius aequationis constructione solui problema poterit. Fig. 12.

Si datis item trianguli ABC tribus lateribus, e vertice B demittatur ad basim AC perpendiculum BD, et quaerantur segmenta baseos AD et DC, nulla se offert aequatio, cuius ope solui problema possit. Sit igitur $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $AD = x$, Fig. 13.

erit $DC = c - x$, ac $BD^2 = BC^2 - DC^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$; item $BD^2 = AB^2 - AD^2 = a^2 - x^2$: vnde $b^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2$, seu $a^2 - b^2 + c^2 = 2cx$, cuius aequationis beneficio iam inueniri poterunt segmenta AD et DC.

211. Si vtrumque inuentae aequationis membrum prorsus idem fuerit, plus indicabit aequatio, quam petatur in problemate. Eliminata enim vtrinque incognita adhuc vera manebit conclusio, adeoque poterit quantitas incognita assumi pro arbitrio, eritque propositio non problema, sed theorema.

Fig. 14. E. g. Si in rectangulo ABCD per datum punctum F ducta sit lateri AB parallela FG, et in ea quaeratur punctum E, e quo ductis ad angulos rectanguli lineis EA, EB, EC, ED, summa quadratorum $AE^2 + EC^2$ sit aequalis summae $EB^2 + ED^2$; fiat $AF = BG = a$, $FD = GC = b$, $AB = c$, $FE = x$, erit $EG = c - x$, $AE^2 = AF^2 + FE^2 = a^2 + x^2$; $EC^2 = GC^2 + EG^2 = b^2 + c^2 - 2cx + x^2$; $ED^2 = FD^2 + FE^2 = b^2 + x^2$; $EB^2 = BG^2 + EG^2 = a^2 + c^2 - 2cx + x^2$: erit ergo ex problematis conditione $a^2 + x^2 + b^2 + c^2 - 2cx + x^2 = b^2 + x^2 + a^2 + c^2 - 2cx + x^2$, seu vtrinque tollendo $2x^2$, et addendo $2cx$, erit $a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + a^2 + c^2$; vnde problema propositum hoc theorema continet: vbicunque sumatur punctum E in recta FG, semper erit $AE^2 + EC^2 = EB^2 + ED^2$.

212. Si reducta aequatione valor incognitae duplex obtineatur, vnus nimirum positiuus, alter negatiuus; constituto principio rectae quaesitae, si ea versus vnam partem sumatur positiue, designeturque a valore illo positiuo, in partem contrariam sumetur negatiue, et designabitur a valore illo negatiuo, quemadmodum supra adnotauimus (11. Schol.).

Fig. 15. E. g. Si inter rectas $AB = a$, et $BC = b$, quaeratur media proportionalis $BD = x$, erit $a : x = x : b$, vnde $x^2 = ab$, et

$x =$

$x = \pm\sqrt{ab}$: si ergo valor eiusdem positiuus $+\sqrt{ab}$ fit $=$BD, erit valor eiusdem negatiuus $-\sqrt{ab} =$ BE, qui propositae quaestioni perinde satisfaciet.

213. Si autem valor incognitae prodeat imaginarius, problema erit impossibile, quod item in superioribus iam monuimus (15): erit etiam impossibile, si aequatio reducta aliquam inuoluat repugnantiam.

E. g. Si quaeratur ordinata circuli respondens abscissae diametro maiori, posita origine abscissarum in peripheria circuli A, sitque AC $= 2a$, abscissa $= x$, ordinata quaesita $= y$, erit ex natura circuli $y^2 = 2ax - x^2$, vnde $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$: quia vero in hoc casu est $2a < x$, erit $2ax < x^2$, adeoque $2ax - x^2$ quantitas negatiua, et hinc y quantitas impossibilis.

Item si proponatur recta AC ita secanda in puncto B, vt quadratum totius AC^2 aequetur quadratis segmentorum $AB^2 + BC^2$, et simul rectangulo eorundem $AB \times BC$: fiat $AC = a$, $AB = x$, erit $BC = a - x$; quare cum ex problematis conditione sit $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB \times BC$, erit $a^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + ax - x^2$, seu $x^2 - ax = 0$, adeoque $x^2 = ax$, et $x = a$, hoc est, pars aequabitur toti, quod repugnat, vnde repugnat etiam rectam AC cum proposita conditione secare.

214. Demum problemata geometrica determinata, quae ad aequationem simplicem, vel affectam quadraticam reducuntur, *plana* adpellantur, quia nimirum ope circini, vt aiunt, et regulae construi possunt: cetera dicuntur *solida*, quorum constructio certas requirit curuas, quae idcirco *loca solida* vocari solent. Plerumque tamen hodie classes locorum, et problematum iuxta aequationum dimensiones constituuntur.

SECTIO I.

De Conſtructionibus Aequationum determinatarum primi, et ſecundi gradus.

CAPVT I.

De conſtructione Aequationum determinatarum primi gradus.

215. Cum problematum geometricorum reſolutiones, ſeu aequationum, ad quas eadem reducuntur, conſtructiones a linearum quarumdam inuentione pendeant (199), ante omnia neceſſe eſt aequationem ad eam formam reducere, vt lineam quampiam exhibere poſſit, id quod obtinebitur ope ſequentis problematis.

216. *Probl. Datam aequationem determinatam primi gradus irrationalitate carentem in proportiones reſoluere.*

Reſol. Si producta ope diuiſionum ad vnicam dimenſionem reducta non fuerint, concipiantur diuiſa per vnitatem toties in ſe ductam, quoties neceſſe erit, vt datum productum ad vnicam dimenſionem reducatur (206); deinde inſtituantur proportiones conuenientes, quemadmodum fecimus in exemplis ſequentibus.

Exempla.

I. Sit $x=\frac{ab}{c}$, erit $cx=ab$, adeoque $c:a=b:x$. Vnde adparet ad rectas c, a, b quaerendam eſſe quartam proportionalem ad habendum valorem incognitae x.

II. Sit $x=\frac{ab}{cd}$. Sumatur pro vnitate quaelibet recta aequationis e. g. b, ac ſupponatur per eam multiplicatus eſſe fractionis numerator, erit $x=\frac{ab^2}{cd}$; deinde inſtituatur haec proportio $d:b=b:\frac{b^2}{d}=m$, erit $x=\frac{am}{c}$: fiat ergo $c:a=m:\frac{am}{c}=x$. Eodem modo ſi fuerit $x=\frac{abc}{dfp}-\frac{def}{bcd}+\frac{hil}{amg}$ etc. ſumatur in quauis fractione vna quantitas pro vnitate, ac per eam concipiatur numerator eſſe multiplicatus, cetera deinceps fiant, vt ante.

III. Sit $x=\frac{abcd}{emn}$. Fiat $e:a=b:\frac{ab}{e}$, ponaturque $\frac{ab}{e}=f$, erit $x=\frac{fcd}{mn}$. Fiat rurſus $m:f=c:\frac{fc}{m}$, ponatur $\frac{fc}{m}=g$, erit $x=\frac{gd}{n}$. Fiat denique $n:g=d:\frac{gd}{n}=x$.

IV. Sit $x=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ etc. ſumatur pro vnitate quiſcunque numeratorum e. g. a, ac per eum concipiantur multiplicati eſſe omnes numeratores; erit $x=\frac{a^2}{b}+\frac{ac}{d}+\frac{ae}{f}$ etc. tum quaeratur, vt in exemplo primo, his fractionibus aequalis recta m, erit $ea=x$. Quod ſi fractiones ſingulae hanc haberent formam $x=\frac{a^2}{b^2}$ etc. ſumendo a pro vnitate eſſet $x=\frac{a^3}{b^2}$ etc. adeoque $b:a=a:\frac{a^2}{b}$, et ponendo $\frac{a^2}{b}=m$ foret $x=\frac{am}{b}$ etc. fieretque reliqua operatio vt ſupra in exemplo 1.

V. Sit $x=\frac{a^3}{b^2+c^2}$. Quaeratur ad rectas b et c tertia proportionalis m, erit $c^2=bm$, et hinc $x=\frac{a^3}{b^2+bm}$. Fiat deinde $b:a=a:\frac{a^2}{b}$, ponatur $\frac{a^2}{b}=n$, erit $x=\frac{an}{b+m}$, vnde $b+m:a=n:x$. Fieri etiam poterat $b^2=cm$, et reliqua operatio eodem modo

peragi. Quodſi denominator tres habeat terminos, duo ex iis debebunt transformari; ſi habeat quatuor, tres erunt transformandi, et ſic porro. E. g. ſi ſit $x = \frac{b^3c}{a^3+b^3+b^2c}$, fiat $b^3 = a^2n$, $b^2c = a^2p$, erit $x = \frac{b^3c}{a^3+a^2n+a^2p}$, vnde $a : b = b : \frac{b^2}{a}$, et $a : b = \frac{b^2}{a} : \frac{b^3}{a^2}$, ac denique $a+n+p : c = \frac{b^3}{a^2} : \frac{b^3c}{a^3+a^2n+a^2p} = x$.

VI. Sit $x = \frac{a^3+b^3}{a^3-c^3} = \frac{a^3}{a^3-c^3} + \frac{b^3}{a^3-c^3}$. Quaeratur, vt in exemplo praecedente, recta aequalis ſummae, vel differentiae harum fractionum. Ceterum huius formae aequationes poſſunt tractari etiam hunc in modum. Sit $x = \frac{a^2+bc}{a+b}$; inuenta poſt a, b, c quarta proportionali m, erit $bc = am$, adeoque $x = \frac{a^2+am}{a+b}$, et hinc $a+b : a = a+m : x$. Sit $x = \frac{a^2c^2-abcf}{acf+bf^2}$: fiat, vt ante, $bf = am$, erit $x = \frac{a^2c^2-a^2cm}{acf+amf} = \frac{ac^2-acm}{cf+mf}$, vnde $f : a = c : \frac{ac}{f}$; et $c+m : c-m = \frac{ac}{f} : \frac{ac^2-acm}{cf+mf} = x$. Interdum etiam ſine hac transformatione reſoluitur fractio in proportionem extrahendo radicem. E. g. ſit $x = \frac{a^2+bc}{a}$, erit $a : \sqrt{(a^2+bc)} = \sqrt{(a^2+bc)} : \frac{a^2+bc}{a} = x$. Sit $x = \frac{a^3+ab^2}{a^2+c^2}$, erit $\sqrt{(a^2+c^2)} : \sqrt{(a^2+b^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)} : \frac{a^2+b^2}{\sqrt{(a^2+c^2)}}$; item $\sqrt{(a^2+c^2)} : a = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{(a^2+c^2)}} : \frac{a^3+ab^2}{a^2+c^2} = x$. Interdum tamen etiam in hoc caſu transformandus erit vnus terminus numeratoris. E. g. ſit $x = \frac{a^3+b^2c}{a^2-c^2}$: fiat $b^2c = acm$, erit $x = \frac{a^3+acm}{a^2-c^2}$, vnde $a+c : a = \sqrt{(a^2+cm)} : \frac{a\sqrt{(a^2+cm)}}{a+c}$; rurſus $a-c : \sqrt{(a^2+cm)} = \frac{a\sqrt{(a^2+cm)}}{a+c} : \frac{a^3+acm}{a^2-c^2} = x$. Quonam autem pacto exhibendae ſint radices per lineas, dicemus in ſequentibus.

Scholion. Quaenam ex allatis methodis in caſu quouis ſpeciali ſit adhibenda, vſus, et aſſidua exercitatio docebit. Generatim autem ea præferenda eſt, quae ſimpliciorem ſuppeditat problematis conſtructionem.

217. *Probl. Conſtruere aequationes determinatas primi gradus irrationalitate carentes.*

Reſol. Reſoluatur aequatio propoſita in proportiones conuenientes (216): deinde iungantur duae rectae indefinitae ſub dato, vel aſſumto ad libitum angulo, et ad detas tres rectas quaeratur quarta proportionalis iuxta proportiones, in quas aequatio reſoluta fuit, id quod exempla clarius docebunt.

Exempla.

I. Sit $x=\frac{ab}{c}$, erit $c:a=b:x$. Quare iunctis ſub dato, Fig. 16. vel aſſumto angulo rectis indefinitis AM et AN, fiat $AB=c$, $BC=a$, $AD=b$, ac ad BC ducatur parallela DE, erit $DE=x$. Eſt enim $AB:BC=AD:DE$, ſeu $c:a=b:\frac{ab}{c}=x$. Vel fiat $AB=c$, $AC=a$, $AD=b$, et ducatur per puncta B et C recta BC, ac eidem e puncto D parallela DE, erit $AE=x$. Eſt enim $AB:AC=AD:AE$, ſeu $c:a=b:\frac{ab}{c}=x$. Quodſi detur angulus A, vel pro libitu aſſumatur, neceſſario determinabitur angulus ABC, et contra.

II. Sit $x=\frac{abc}{mn}$, erit 1) $m:a=b:\frac{ab}{m}$. Fiat ergo $AB=m$, $AD=a$, $BC=b$, erit $DE=\frac{ab}{m}$. 2) $n:\frac{ab}{m}=c:\frac{abc}{mn}=x$. Fiat ergo $DF=n$, $DH=c$, erit $DG=x$. Eſt enim $DF:DE=DH:DG$, ſeu $n:\frac{ab}{m}=c:\frac{abc}{mn}=x$.

Fig. 17. III. Sit $x=\frac{a^2c^2-abcf}{acf+bf^2}$, erit 1) $a:b=f:\frac{bf}{a}=m$. Fiat ergo AB$=a$, BD$=b$, AC$=f$, ducaturque CE parallela ad BD, erit AB: BD$=$AC: CE, seu $a:b=f:\frac{bf}{a}=m$, vnde CE$=m$. 2) $f:a=c:\frac{ac}{f}$. Fiat ergo CG$=c$, cum sit AC: AB$=$CG: BH, seu $f:a=c:\frac{ac}{f}$, erit BH$=\frac{ac}{f}$. 3) $c+m:c-m=\frac{ac}{f}:x$. Fiat ergo CK$=$CE$=m$, erit GK$=$CG$+$CK$=c+m$, et GE$=c-m$: fiat praeterea GL$=$BH$=\frac{ac}{f}$, ducaturque KL, ac eidem e puncto E parallela EN, erit GN$=x$. Est enim GK: GE$=$GL: GN, seu $c+m:c-m=\frac{ac}{f}:x$.

Fig. 18. IV. Sit $x=\frac{a^2b}{a^2-c^2}$, erit 1) $a+c:a=a:\frac{a^2}{a+c}$. Fiat ergo AC$=$AG$=a$, CD$=$CB$=c$, ducaturque recta BG, ac eidem e puncto C parallela CH, erit AB: AC$=$AG: AH, seu $a+c:a=a:\frac{a^2}{a+c}=$AH. 2) $a-c:b=\frac{a^2}{a+c}:\frac{a^2b}{a^2-c^2}=x$. Fiat ergo AM$=b$, ducaturque recta HD, ac eidem e puncto M parallela ML, erit AL$=x$. Est enim AD: AM$=$AH: AL, seu $a-c:b=\frac{a^2}{a+c}:\frac{a^2b}{a^2-c^2}=x$.

218. *Probl. Construere aequationes determinatas primi gradus irrationalitatem inuoluentes.*

Resol. Aequationes huiusmodi construuntur ope trianguli rectanguli, aut ope circuli. Est enim in triangulo rectangulo hypotenusa aequalis radici summae quadratorum cathetorum, et quiuis cathetus aequalis radici differentiae quadratorum hypotenusae, ac alterius catheti. In circulo autem quaeuis ordinata est radix rectanguli abscissarum.

Exempla.

I. Sit $x=\sqrt{ab}$. Iunctis rectis $AB=a$, et $BC=b$ in vnicam rectam AC, ea tanquam diametro describatur circulus, ac in B perpendiculariter erigatur ordinata BD, erit ea $=\sqrt{ab}=x$: valorem eiusdem x negatiuum $-\sqrt{ab}$ esse rectam BE perspicuum est (212). Si foret $x=\sqrt{2ab}$, capienda esset recta $AB=2a$. Si foret $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$, esset recta a pro vnitate assumta $x=\sqrt{\frac{a^2}{ab}}$: si ergo quaeratur, vt supra, recta $=\sqrt{ab}=m$, erit $x=\frac{a}{m}$. Fig. 15.

II. Sit $x=\sqrt{(4a^2\pm ab)}$. Fiat $AB=4a\pm b$, et $BC=a$, erit ordinata $BD=\sqrt{(4a^2\pm ab)}=x$. Sit $x=\sqrt{(3a^2\pm ab\pm 2ac)}$. Fiat $AB=3a\pm b\pm 2c$, et $BC=a$, erit, vt ante, $BD=x$. Generatim vtcunque combinentur termini sub signo radicali, semper eadem erit constructio, si factorem vnum omnes habeant communem: nimirum BC semper fit aequalis communi illi factori, et AB aequalis summae vel differentiae omnium terminorum per factorem illum diuisorum; quo quidem in casu si AB euadat quantitas negatiua, erit BD seu x quantitas imaginaria, vt si in aequatione $x=\sqrt{(ab-ac)}$ esset $c>b$.

III. Si vero in exemplo superiore non sint omnes termini per eundem factorem multiplicati, transformari debent omnes illi, qui non sunt multiplicati. E. g. sit $x=\sqrt{(a^2\pm b^2)}$; quaerendo post a et b tertium proportionalem m, erit $b^2=am$, et hinc $x=\sqrt{(a^2\pm am)}$: si ergo iam fiat $AB=a\pm m=a\pm\frac{b^2}{a}$, et $BC=a$, erit $BD=\sqrt{(a^2\pm b^2)}=x$. Sit $x=\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}$: fiat $b^2=am$, $c^2=an$, erit $x=\sqrt{(a^2+am-an)}$: quare si fiat $AB=a+m-n$, et $BC=a$, erit $BD=x$. Et sic porro.

Ceterum huiusmodi aequationes etiam absque vlla transformatione construi possunt ope trianguli rectanguli. Sit enim Fig. 19.

$x=\sqrt{(a^2+b^2)}$, et fiat $AB=a$, $BC=b$, erit $AC=\sqrt{(AB^2+BC^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)}=x$. Sit $x=\sqrt{2a^2}$, et fiat $AB=a$, $BC=a$, erit $AC=\sqrt{2a^2}=x$. Sit $x=\sqrt{5a^2}$, et fiat $AB=2a$, $BC=a$, erit $AC=\sqrt{5a^2}=x$. Sit $x=\sqrt{(a^2+b^2\pm c^2)}$ et fiat $AB=a$, $BC=b$, erit $AC=\sqrt{(a^2+b^2)}$, cui iungatur $CD=c$ ad angulum rectum, erit $AD=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}=x$: vel diametro AC describatur semicirculus, in quo fiat chorda $AG=c$, erit $GC=\sqrt{(AC^2-AG^2)}=\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}=x$, et sic porro.

IV. Sit $x=\sqrt{(ab+cd)}$. Inter a et b, item inter c et d inueniantur mediae proportionales m et n, erit $ab=m^2$, $cd=n^2$, et hinc $x=\sqrt{(m^2+n^2)}$: construatur deinde triangulum rectangulum, cuius catheti sint m et n, erit eiusdem hypotenusa $=x$.

Fig. 15. Vel quaeratur post rectas a, c, d quarta proportionalis m, eritque $am=cd$, et hinc $x=\sqrt{(ab+am)}$: fiat ergo $AB=b+m$, et $BC=a$, erit $BD=\sqrt{(ab+am)}=\sqrt{(ab+cd)}=x$.

V. Sit $x=\sqrt{(a^2+bc)}$. Poterit bc transformari, vt ante, in am, et fieri $AB=a+m$, et $BC=a$, eritque $BD=x$.

Fig. 20. Vel fiat $BD=b$, $DC=c$, quibus in vnam iunctis, ac super BC descripto semicirculo, erit ordinata perpendicularis $DE=\sqrt{bc}$. Deinde fiat $DA=a$, erit $AE=\sqrt{(AD^2+DE^2)}=\sqrt{(a^2+bc)}=x$. Sit $x=\sqrt{(a^2+bc+d^2)}$. Erigatur ad rectam AE nunc inuentam perpendicularis $EF=d$, erit $AF=\sqrt{(AE^2+EF^2)}=\sqrt{(a^2+bc+d^2)}=x$. Sit $x=\sqrt{(a^2+bc+c^2)}$. Fiat $BD=b+d$, et $DC=d$, erit $DE=\sqrt{(bc+c^2)}$: tum fiat $DA=a$, erit $AE=\sqrt{(DA^2+DE^2)}=\sqrt{(a^2+bc+c^2)}=x$.

Fig. 21. VI. Sit $x=\sqrt{(a^2-b^2+c^2)}$. Fiat $AB=a$, ac super eadem descripto semicirculo fiat chorda $AC=b$, erit chorda $BC=\sqrt{(AB^2-AC^2)}=\sqrt{(a^2-b^2)}$. Tum producta recta AC fiat $CD=c$, erit $BD=\sqrt{(BC^2+CD^2)}=\sqrt{(a^2-b^2+c^2)}=x$. Sit $x=\sqrt{(a^2-b^2-c^2)}$. Fiat $AE=b$, $EC=c$, quibus ad angulum re-

rectum E inuentis erit $AC=\sqrt{(b^2+c^2)}$: tum diametro $AB=a$ describatur semicirculus, in quo capiatur chorda $AC=\sqrt{(b^2+c^2)}$, erit chorda $BC=\sqrt{(AB^2-AC^2)}=\sqrt{(a^2-b^2-c^2)}=x$.

VII. Sit $x=\sqrt{(a^2-bc)}$, vel $=\sqrt{(a^2-bc-dc)}$. Fiat in primo casu $AB=b$, in secundo $=b+d$, $AD=c$, $AM=a$, ac diametris BD et AM describantur semicirculi, erit ordinata perpendicularis AF in primo casu $=\sqrt{bc}$, in secundo $=\sqrt{(bc+cd)}$: si ergo capiatur chorda $AG=AF$, erit chorda $GM=\sqrt{(AM^2-AG^2)}=\sqrt{(a^2-bc)}$ vel $=\sqrt{(a^2-bc-cd)}=x$. Sit $x=\sqrt{(a^2-bc-d^2)}$. Fiat $AB=b$, $AD=c$, erit ordinata $AF=\sqrt{bc}$, cui si $FH=d$ iungatur ad angulum rectum F, erit $AH=\sqrt{(bc+d^2)}$; quare si capiatur chorda $AK=AH$, erit chorda $KM=\sqrt{(AM^2-AK^2)}=\sqrt{(a^2-bc-d^2)}=x$. Fig. 22.

VIII. Sit $x=\sqrt[4]{(a^4+b^4)}=\sqrt{\sqrt{(a^4+b^4)}}$. Ad rectas a et b quaeratur tertia proportionalis m, erit $b^2=am$, et $b^4=a^2m^2$, adeoque $x=\sqrt{\sqrt{(a^4+a^2m^2)}}=\sqrt{(a\sqrt{(a^2+m^2)})}$. Fiat porro $AB=a$, et perpendicularis $BC=m$, erit $AC=\sqrt{(a^2+m^2)}$, in qua producta capiatur $AE=AB=a$, ac diametro EC describatur semicirculus, erit ordinata perpendicularis $AD=\sqrt{(AE\times AC)}=\sqrt{(a\sqrt{(a^2+m^2)})}=x$. Fig. 23.

IX. Sit $x=\sqrt{\left(\frac{4c^2cf^2}{4b^2d-a^2c}\right)}$. Fiat $AB=c$, et perpendicularis $BD=2b$, ductaque recta AB bisecetur in G, ac illic erigatur perpendiculum GP occurrens rectae AB si opus sit productae in puncto P, et ducatur PD, erit ob triangula PGA et PGD aequalia $PA=PD$: quare radio PA descriptus semicirculus transibit per D, eritque $AB:BD=BD:BC$, seu $c:2b=2b:BC$, vnde $BC=\frac{4b^2}{c}$. Porro in recta BC producta capiatur $CE=d$, ac diametro BE ducatur semicirculus BHE, erigaturque perpen- Fig. 24.

diculum CH, erit $CH^2 = BC \times CE = \frac{4b^2d}{c}$. Item diametro CH describatur semicirculus CIH, et in eodem capiatur chorda $CI = a$, erit chorda $HI = \sqrt{(CH^2 - CI^2)} = \sqrt{\left(\frac{4b^2d}{c} - a^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{4b^2d - a^2c}{c}\right)}$. Denique rectae AE sub quouis angulo iungatur recta indefinita AN, et fiat $AK = HI$, $AL = 2e$, $AM = f$, ducaturque recta KM, et huic ex L parallela LN, erit $AK : AL = AM : AN$, seu $AK^2 : AL^2 = AM^2 : AN^2$, hoc est $\frac{4b^2d - a^2c}{c} : 4e^2 = f^2 : AN^2$: quare $AN^2 = \frac{4e^2cf^2}{4b^2d - a^2c}$, et hinc $AN = \sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d - a^2c}\right)} = x$.

Scholion. Casus magis complicati facile ad hos reduci poterunt adhibita exercitatione crebriori. Si occurrant fractiones compositae e quantitatibus partim rationalibus, partim irrationalibus, in earundem constructione ambo problemata praecedentia combinanda erunt. E. g. si fuerit $x = \sqrt{\left(a^2 + \frac{bcdi - hfgl}{ac - bd}\right)} - \frac{a^2c^2 - abcf}{acf + bf^2}$, diuidatur imprimis denominator quantitatis radicalis per a, erit is $= c - \frac{bd}{a}$, cui quaeratur aequalis recta m, erit $am = ac - bd$, adeoque $x = \sqrt{\left(a^2 + \frac{bcdi - hfgl}{am}\right)} - \frac{a^2c^2 - abcf}{acf + bf^2}$. Quaeratur deinde quarta proportionalis n post rectas a, b, c, erit $n = \frac{bc}{a}$, et $\frac{bcdi}{am} = \frac{ndi}{m}$, vnde $x = \sqrt{\left(a^2 + \frac{ndi}{m} - \frac{hfgl}{am}\right)} - \frac{a^2c^2 - abcf}{acf + bf^2}$. Similiter reducatur $\frac{ndi}{m}$ ad qi, et $\frac{hfgl}{am}$ ad rl, fiet $x = \sqrt{(a^2 + qi - rl)} - \frac{a^2c^2 - abcf}{acf + bf^2}$. Fiat igitur triangulum rectangulum, cuius catheti sint a, et p media proportionalis inter q et i, erit eiusdem hypotenusa $u = \sqrt{(a^2 + p^2)} = \sqrt{(a^2 + qi)}$. Rursus fiat $rl = t^2$, ac diametro u describatur semicirculus, in quo capiatur chorda $= t$, erit altera chorda $= \sqrt{(a^2 + p^2 - t^2)} = \sqrt{a^2 + qi - rl}$. Quaeratur

denique, vt ſupra (217. Exemp. 3.) recta $= \frac{a^2c^2 - abcf}{acf + bf^2}$, et ſubtrahatur e chorda inuenta, erit reſiduum $= x$.

CAPVT II.

De conſtructione Aequationum determinatarum ſecundi gradus.

219. Secundi gradus aequationes termino ſecundo carentes reuocantur ad hanc formam $x^2 + q = 0$, ſeu $x = \pm\sqrt{-q}$ (128), adeoque ope ſuperiorum (218) conſtrui poſſunt. Igitur hoc loco ſermo nobis erit de huius generis aequationibus nullo termino carentibus, quarum conſtructiones proponemus tam retento, quam ſublato ſecundo termino.

220. *Probl. Conſtruere aequationes determinatas ſecundi gradus ſine terminorum transformatione.*

Reſol. Omnes id genus aequationes reuocari poſſunt ad has quatuor formulas generales (130).

Formulae	*Radices*
1) $x^2 + ax - bc = 0$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + bc\right)}$
2) $x^2 - ax - bc = 0$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + bc\right)}$
3) $x^2 + ax + bc = 0$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - bc\right)}$
4) $x^2 - ax + bc = 0$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - bc\right)}$

Iam 1) duae priores hunc in modum poterunt conſtrui. Fig. 25. Sit $b > c$, et quauis diametro, quae non ſit minor quam a, et quam $b - c$, deſcribatur circulus FHG, in quo fiat chorda FG $= a$, FH $= b - c$, in qua producta capiatur HE $= c$, erit FE $= b$; deinde radio CE deſcribatur circulus priori concentricus EADB,

occurrens chordis productis in punctis E, A, D, B; erit FA radix positiua, FB negatiue sumta radix negatiua primae formulae: ac vicissim FA negatiue sumta radix negatiua, FB radix positiua secundae formulae.

Demonstr. Est enim $FA=GB$, $FD=HE$, et $FD\times FE=FA\times FB$ (Elem. 418). Secetur igitur chorda FG bifariam in in puncto I, erit $IA^2=IF^2+FA\times FB$ (Elem. 426) $=IF^2+FD\times FE$; est autem $IF^2=\frac{1}{4}a^2$, et $FD\times FE=bc$: ergo $IA^2=\frac{1}{4}a^2+bc$, adeoque $IA=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+bc\right)}$: quare $FA=IA-IF=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+bc\right)}$; et $FB=FI+IB=FI+IA=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+bc\right)}$, adeoque FB negatiue sumta $=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+bc\right)}$: id est, FA est radix positiua, FB negatiue sumta est radix negatiua primae Formulae. Similiter FA negatiue sumta est $=\frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+bc\right)}$, et FB positiue sumta est $=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+bc\right)}$; hoc est, FA negatiue sumta est radix negatiua, FB est radix positiua secundae formulae.

Fig. 26. 2) Posteriores duae formulae hoc pacto construuntur. Diametro non minore quam a, et quam $b+c$, ducatur circulus FGH, in quo fiat chorda $FG=a$, $FH=b+c$, e qua resecetur $HE=c$, ac radio CE describatur circulus priori concentricus ABED secans chordas in punctis A, B, E, D; erit $FE=FH-HE=b$, et FA ac FB negatiue sumtae erunt radices formulae tertiae; eaedem positiue sumtae erunt radices formulae quartae.

Demonstr. Est enim $FD=EH=c$, et $FA=BG$. Bisecetur igitur chorda FG in puncto I, erit $FI^2=AI^2+FA\times AG=AI^2+FD\times DH$, id est $\frac{1}{4}a^2=bc+AI^2$; vnde $AI^2=\frac{1}{4}$

$a^2 - bc$, et $AI = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - bc\right)}$: quare $-IF + IA = -FA = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - bc\right)}$; et $-IA - IG = -AG = -FB = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - bc\right)}$, quae sunt radices formulae tertiae. Similiter $IA + IG = AG = FB = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - bc\right)}$, et $IF - IA = FA = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - bc\right)}$, quae sunt radices formulae quartae.

220. *Coroll.* Si in duabus postremis formulis fuerit $bc = \frac{1}{4}a^2$, erit $FA = \mp\frac{1}{2}a$, et $FI = IG = GB$: quare punctis A, I, B coeuntibus circulus ABED tanget duntaxat chordam FG, ac proinde ambae radices FA et FB aequales erunt (134). Sin autem fuerit $bc > \frac{1}{4}a^2$, circulus idem chordam FG nec secabit, nec tanget, eruntque radices ambae imaginariae (135).

221. *Probl. Construere aequationes determinatas secundi gradus praemissa termini vltimi transformatione.*

Resol. Si inter factores termini vltimi b et c inueniatur media proportionalis m, erit $bc = m^2$, adeoque formulae generales praecedentis problematis in has abibunt

Formulae.	*Radices.*
1) $x^2 + ax - m^2 = 0$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + m^2\right)}$
2) $x^2 - ax - m^2 = 0$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + m^2\right)}$
3) $x^2 + ax + m^2 = 0$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$
4) $x^2 - ax + m^2 = 0$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$

Iam 1) Priores duae hoc pacto construentur. Radio Fig. 27. $CA = \frac{1}{2}a$ describatur circulus, ducaturque tangens $AB = m$, et

secans BD: erit BE radix positiua, et BD negatiue sumta radix negatiua primae formulae: et vicissim BD radix positiua, ac BE negatiue sumta radix negatiua secundae formulae.

Demonstr. Est enim $CA=CD=CE=\frac{1}{2}a$, $CB=\sqrt{(CA^2+AB^2)}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+m^2\right)}$: ergo $CB-CE=BE=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+m^2\right)}$; et BD negatiue sumta $=-CD-CB=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+m^2\right)}$, quae sunt radices primae formulae. Similiter $BD=CD+CB=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+m^2\right)}$; et BE negatiue sumta $=-BC+CE=\frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+m^2\right)}$, quae sunt radices secundae formulae.

Fig. 98. 2) Posteriores duae formulae poterunt construi hunc in modum. Ducto circulo, ac tangente AB vt supra, ducatur BD diametro AM parallela, erunt BE et BD radices formulae quartae, ac eaedem negatiue sumtae erunt radices formulae tertiae.

Demonstr. Ductis enim radiis CD, et CE, item CI ad BD perpendiculari, erit $ID=IE=\sqrt{(CE^2-CI^2)}=\sqrt{(CA^2-AB^2)}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-m^2\right)}$, et hinc $BE=BI-IE=\frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-m^2\right)}$; et $BD=BI+IE=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-m^2\right)}$, quae sunt radices formulae quartae; eodem modo patet $-BE$, et $-BD$, esse radices tertiae formulae.

222. *Coroll.* 1. Ex constructione harum formularum eruitur canon quidam generalis pro construenda quauis aequatione determinata secundi gradus: patet nimirum pro radio AC semper assumendum esse dimidium coefficientem termini secundi, ac pro tangente AB radicem quadratam termini vltimi; cetera peragenda, vt ante. E. g. si construenda foret aequatio x^2+ax-

$bx - a^2 + c^2 = 0$, fieri deberet radius $AC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, tangens $AB = \sqrt{(c^2 - a^2)}$ et siquidem foret $a > c$, aequatio pertineret ad duas priores formulas, adeoque adhibenda esset Figura 27; si vero $a < c$, Fig. 28.

223. *Coroll.* 2. Si in casu posteriore parallela BD circulum tangeret tantum, non secaret, id quod accidit, dum est $AB = AC$, seu $\frac{1}{2}a = m$, radices ambae BE et BD aequales forent, vna scilicet positiua, altera negatiua (134): si vero circulo nusquam occurreret, id quod contingit, si sit $AB > AC$, seu $m > \frac{1}{2}a$ radices ambae essent imaginariae, quod quidem vel inde perspicuum est, quod tunc $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$ foret quantitas imaginaria (135).

224. *Coroll.* 3. Poterunt eaedem formulae methodo vix quidquam dissimili vnica Figura construi hoc modo. Pro duabus primis formulis fiat recta $AB = \frac{1}{2}a$, et perpendicularis $BC = m$; tum hypotenusa AC tanquam radio describatur semicirculus occurrens rectae AB vtrinque productae in punctis E et D: erit $AD = AC = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + m^2\right)}$, et hinc $DB = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + m^2\right)}$, quae est radix positiua formulae secundae, ac eadem in partem contrariam sumta est radix negatiua formulae primae, et $EB = AE - AB = AC - AB = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + m^2\right)}$, quae est radix positiua primae formulae, ac eadem ex parte contraria sumta est radix negatiua formulae secundae. Pro construendis duabus reliquis formulis sit diameter $DE = a$, tangens $EF = m$, ducaturque recta FC diametro DE parallela, ac ex puncto C de- Fig. 29.

mittatur in diametrum perpendicularis CB, erit $AB = \sqrt{(AC^2 - CB^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$: ergo $DB = DA + AB = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$, et $BE = AE - AB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$; quae ſunt radices formulae quartae, ac eaedem in partem contrariam ſumtae ſunt radices formulae tertiae.

225. *Probl. Conſtruere eaſdem aequationes ſublato antea termino ſecundo.*

Reſol. Sit formula generalis aequationum ſecundi gradus $x^2 + px + q = 0$, haec termino ſecundo ſublato mutabitur in hanc $y^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$ (136), cuius radici y ſi adiungatur $-\frac{1}{2}p$, habebitur x. Eſt vero $y = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}$, qua conſtructa (218) facile obtinebitur $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}$.

E. g. Sit conſtruenda aequatio $x^2 - 3ax - m^2 = 0$; haec ponendo $x = y + \frac{3}{2}a$ mutabitur in hanc $y^2 - \frac{9}{4}a^2 - m^2 = 0$, vnde $y = \pm\left(\frac{9}{4}a^2 + m^2\right)$, quae eſt hypotenuſa trianguli rectanguli habentis cathetos $\frac{3}{2}a$, et m, cui addendo cathetum ipſum $\frac{3}{2}a$ obtinebitur radix quaeſita x.

CAPVT III.

De variis praecedentium conſtructionum adplicationibus ad Problemata Geometrica.

Fig. 30. 226. *Probl. E dato extra circuli peripheriam puncto A tangentem ad eandem ducere.*

Reſol. Cogitetur ducta iam eſſe tangens AB. Cum circulus EBDT tam poſitione, quam magnitudine detur, detur item

item punctum A, dantur etiam rectae AE et EC: fit ergo AE $=a$, EC$=b$, AB$=x$, erit AD$=a+2b$, et $AB^2=AE\times AD$ (Elem. 423) ſeu $x^2=a^2+2ab$, adeoque $x=\pm\sqrt{(a^2+2ab)}$.

Conſtr. Datum punctum A connectatur cum dato circuli centro C per rectam AC, ſupra quam tanquam diametrum deſcribatur circulus ABCT ſecans prioris peripheriam in punctis B et T, erunt rectae AB et AT connectentes punctum A cum punctis B et T tangentes quaeſitae. Ducto enim radio CB erit ob angulum ABC rectum $AB^2=AC^2-CB^2=a^2+2ab+b^2-b^2=a^2+2ab$, et hinc AB$=x=\sqrt{(a^2+2ab)}$, quae eſt aequatio ad conſtruendum propoſita. Eodem modo adparet rectam quoque AT tangentem eſſe.

227. *Probl. Datam quamuis rectam finitam* AB *media et extrema ratione ſecare.* Fig. 31.

Reſol. Cogitetur recta AB ſecta iam eſſe hoc pacto in puncto D, ſitque AB$=a$, AD$=x$, erit DB$=a-x$, eſt autem ex conditione problematis AB: AD$=$AD: DB: ergo $a:x=x:a-x$, vnde $x^2=a^2-ax$, ſeu $x^2+ax-a^2=0$, et hinc $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)}=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Conſtr. In extremo datae rectae puncto B erigatur perpendicularis BC$=\frac{1}{2}a$, erit hypotenuſa $AC=\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: ſi ergo fiat CE$=CB=\frac{1}{2}a$, erit $AE=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=x$: quare ſi rádio AE ducatur arcus ED occurrens rectae AB alicubi in puncto D, erit AE$=$AD$=x$. Quodſi punctum D ſumatur in recta AB verſus A producta, erit AD radix negatiua aequationis, et tunc media ac extrema ratione ſecabitur eadem recta AB iacens ex parte oppoſita.

Fig. 30. 228. *Probl. Data duarum rectarum differentia, ac data recta inter easdem media proportionali, inuenire ipsas rectas.*

Resol. Sit data differentia $=d$, data media proportionalis $=m$, minor rectarum $=x$, erit maior earundem $=x+d$, ac ex problematis conditione $x:m=m:x+d$, vnde $x^2+dx=m^2$, adeoque $x=\pm\sqrt{\left(m^2+\frac{1}{4}d^2\right)}-\frac{1}{2}d$.

Constr. Sit data media proportionalis AB, in cuius extremo B erigatur perpendicularis $BC=\frac{1}{2}d$, qua tanquam radio describatur circulus, ac ex puncto A per centrum C ducatur secans AD, erit $AC=\sqrt{(AB^2+BC^2)}=\sqrt{\left(m^2+\frac{1}{2}d^2\right)}$, et hinc $AE=AC-EC=\sqrt{\left(m^2+\frac{1}{4}d^2\right)}-\frac{1}{2}d=x$. Si in opposito extremo rectae AB erigatur perpendiculum BC, simili constructione obtinebitur radix negatiua aequationis. Sunt adeo rectae quaesitae AE et AD, inter quas tangentem AB mediam proportionalem esse vel ex elementis constat.

Fig. 32. 229. *Probl. Dato cuiuis triangulo* ABC *quadratum inscribere.*

Resol. Cogitetur inscriptum iam esse quadratum GKLH. E vertice trianguli A demittatur ad basim BC perpendicularis AD, quae nota erit ob datum triangulum ABC. Sit porro basis $BC=a$, $AD=b$, $ID=GH=x$, erit $AI=b-x$. Praeterea propter triangula ABC et AGH similia erit $AD:BC=AI:GH$, seu $b:a=b-x:x$, vnde $bx=ab-ax$, seu $bx+ax=ab$, et $x=\frac{ab}{b+a}$.

Constr. Basi BC indefinite producta fiat $DE=BC=a$, $EF=AD=b$, erit $DF=a+b$. Iungantur puncta A et F recta AF, cui e puncto E ducatur parallela EI occurrens perpen-

diculo AD alicubi in puncto I, per quod punctum ducatur recta GH basi BC parallela, erit ea $=x$, seu latus quadrati inscribendi. Nam ob parallelas AF et EI erit EF: AI = ED: ID, seu $b : b - x = a : x$, vnde $bx = ab - ax$, siue $bx + ax = ab$, adeoque $x = \frac{ab}{b+a}$, quae est aequatio ad construendum proposita. Cum ergo eadem aequatio deducta fuerit primum ex suppositione GH $= x$, deinde ex suppositione ID $= x$, perspicuum est fore GH = KL = ID = GK = HL, adeoque GKLH fore quadratum.

230. *Probl. Dato circulo triangulum aequilaterum inscribere.*

Resol. Sit latus trianguli inscribendi AE $= x$, ad quod e centro C demisso radio perpendiculari CB $= a$, erit AD $= \frac{1}{2}x$, AB latus hexagoni regularis eidem circulo inscribendi, adeoque $= a$; quare triangula ABD et ADC sibi imposita congruent, eritque BD = DC $= \frac{1}{2}a$: ergo $AC^2 = DC^2 + AD^2$, seu $a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}x^2$, et hinc $\frac{1}{4}x^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$, et $x^2 = 3a^2$, adeoque $x = \sqrt{3a^2}$. Fig. 33.

Constr. Super dati circuli diametro AB construatur triangulum aequilaterum ABC, cuius vertex C connectatur cum centro D per rectam CD, quae necessario erit ad basim AB perpendicularis: erit AC $= 2a$, AD $= a$, et hinc $CD^2 = AC^2 - AD^2$, seu $= 4a^2 - a^2 = 3a^2$, adeoque CD $= \sqrt{3a^2} = x$: erit ergo CD latus trianguli inscribendi, cui si fiat aequalis chorda GE, erit GEF triangulum desideratum. Fig. 34.

231. *Probl. Dato circulo decagonum regulare inscribere.*

Resol. Sit latus decagoni inscribendi AB $= x$, erit angulus ACB $= 36°$, adeoque angulus CAB = CBA $= 72°$. Fiat ergo AD = AC $= a$, erit angulus CAD $= 108°$, adeoque angulus ADC = ACD $= 36°$, et hinc angulus DCB $= 72°$: igitur triangula DCB et ACB similia Fig. 35.

erunt; vnde BD: BC = BC: AB, ſeu $a+x:a=a:x$, et hinc $x^2+ax=a^2$, ac $x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)}=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Conſtr. Si radius circuli a media et extrema ratione ſecetur, erit eiuſdem ſegmentum maius latus decagoni regularis inſcribendi, ſeu $=x$ (227). Poterit eadem aequatio etiam hunc in modum conſtrui. E centro dati circuli C erigatur radius CE ad diametrum AB perpendicularis, fiatque $CD=\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}a$, erit hypotenuſa $DE=\sqrt{(CE^2+CD^2)}=\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: ſi ergo centro D radio DE ducatur arcus EF occurrens diametro AB alicubi in F, erit $CF=DF-DC=DE-DC=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=x$.

Fig. 36.

232. *Coroll.* Eſſe autem EF latus pentagoni regularis eidem circulo inſcribendi facile oſtenditur. Sit enim in Fig. 35. radius $AC=a$, latus decagoni $AB=b$, latus pentagoni $AM=x$, erit $AN=\frac{1}{2}x$, $CN=\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{4}x^2\right)}$, vnde $NB=a-\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{4}x^2\right)}$: ergo AB^2 ſeu $b^2=AN^2+NB^2=\frac{1}{4}x^2+a^2-2a\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{4}x^2\right)}+a^2-\frac{1}{4}x^2=2a^2-2a\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{4}x^2\right)}$; quare $2a\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{4}x^2\right)}=2a^2-b^2$, ac vtrinque eleuando ad quadratum $4a^4-a^2x^2=4a^4-4a^2b^2+b^4$, ſeu $4a^2b^2-b^4=a^2x^2$, et hinc $x^2=\frac{4a^2b^2-b^4}{a^2}=4b^2-\frac{b^4}{a^2}$. Eſt autem $b=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (231), adeoque $b^2=\frac{6}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, et $b^4=\frac{14}{4}a^4-3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; quo valore ſubſtituto loco b^2 et b^4 erit $x^2=\frac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{\frac{14}{4}a^4+3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}}{a^2}=\frac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{14}{4}a^2+3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{10}{4}a^2$

$-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=a^2+\frac{6}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=a^2+b^2$. Eſt adeo quadratum lateris pentagoni aequale ſummae quadratorum radii, et lateris decagoni; vnde perſpicuum eſt in Fig. 36. rectam EF eſſe latus pentagoni regularis.

233. *Probl. Datis in diametro circuli* AB *punctis* D *et* E *a centro* C *aequaliter diſtantibus, inuenire in peripheria punctum* G, *e quo ſi ad centrum, et ad data illa puncta ducantur rectae* GD, GC, GE, *radius* GC *ſit medius proportionalis inter rectarum* GD *et* GE *ſummam, ac differentiam.* Fig. 37.

Reſol. Sit punctum illud quaeſitum G, e quo ad diametrum AB demittatur perpendiculum GF, et ſit DC=CE=a, radius GC=b, GD=x, GE=y, CF=u, erit ex problematis conditione $x+y:b=b:x-y$, vnde 1) $b^2=x^2-y^2$. Porro $GD^2=DF^2+GF^2$, ſeu 2) $x^2=a^2+2au+u^2+GF^2$: item $GC^2=CF^2+GF^2$, ſeu 3) $b^2=u^2+GF^2$: quare tollendo aequationem tertiam a ſecunda erit $x^2-b^2=a^2+2au$, ſeu 4) $x^2=a^2+b^2+2au$. Denique $GE^2=EF^2+GF^2$, ſeu 5) $y^2=u^2-2au+a^2+GF^2$, a qua aequatione tollendo tertiam erit $y^2-b^2=a^2-2au$, ſeu 6) $y^2=a^2+b^2-2au$, quam tollendo a quarta erit $x^2-y^2=4au$, et hanc comparando cum prima obueniet demum $b^2=4au$, adeoque $u=\frac{b^2}{4a}$.

Conſtr. Soluendo aequationem poſtremam in proportionem erit $4a:b=b:u$, adeoque methodo conſueta reperietur u=CF, qua inuenta e puncto F erigatur perpendiculum FG, quod in peripheria circuli determinabit punctum quaeſitum G.

234. *Probl. Data area trianguli rectanguli, et vno angulo acuto, inuenire eiuſdem cathetos.*

Reſol. Sit area data $=a^2$, cathetus angulo dato adiacens $=x$, finus totus $=r$, tangens anguli dati $=t$, erit alter cathetus $=\frac{2a^2}{x}$ (Elem. 494). Porro cathetus x ſe habet ad alterum cathetum vt finus totus ad tangentem anguli dati (Elem. 461), ſeu $x:\frac{2a^2}{x}=r:t$, id eſt $x^2:2a^2=r:t$, vnde $x^2=\frac{2a^2r}{t}$, et $x=\pm\sqrt{\frac{2a^2r}{t}}$.

Fig. 38. *Conſtr.* Fiat angulus ABC aequalis dato, ſitque $BC=2a$, ac e puncto C erigatur perpendiculum CA occurrens lateri BA alicubi in puncto A, erit $BC=r$, $CA=t$. Producatur perpendiculum AC indefinite, donec erecta ad AB perpendicularis BD eidem alicubi occurrat in D, erit $CA:BC=BC:CD$, ſeu $t:r=2a:CD$, vnde $CD=\frac{2ar}{t}$. Fiat porro $CE=CD$, et $CI=\frac{1}{2}CB=a$, ac diametro EI deſcribatur ſemicirculus, erit $CM=\sqrt{(CE\times CI)}=\sqrt{\frac{2a^2r}{t}}=x$: fiat ergo $CO=CM$, et e puncto O ducatur recta ON parallela ad BA, erit CON triangulum quaeſitum. Eadem eſſet conſtructio ope radicis negatiuae in ſemicirculo inferiore.

Fig. 39. 235. *Probl. Dato circulo, et parte radii* CA *inter centrum, et rectam* BA *e fine diametri* FB *perpendiculariter demiſſam intercepta, inuenire in tangente* BN *punctum* N, *ita vt ſit* $NB\times BA=FB\times CA$.

Reſol. Sit $CA=b$, radius $CB=a$, $BN=x$, erit $AB=\sqrt{(CB^2-CA^2)}=\sqrt{(a^2-b^2)}$; et ex problematis conditione $x\sqrt{(a^2-b^2)}=2ab$, et hinc $x=\frac{2ab}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$.

Conſtr. E puncto F ducatur rectae AB parallela FN occurrens tangenti alicubi in puncto N, erit N punctum quaeſitum. Nam ob triangula ABC et FBN ſimilia erit $AB:AC=FB:BN$, ſeu $\sqrt{(a^2-b^2)}:b::2a:BN$, vnde $BN=\frac{2ab}{\sqrt{(a^2-b^2)}}=x$.

236. *Probl. Dato ſemicirculo* ABC, *erectaque ordinata quapiam perpendiculari* PM, *ab extremitate diametri* A *ducere chordam* AB *ea lege, vt pars eiuſdem* EB *aequetur radio* AD. Fig. 40.

Reſol. Ponamus chordam illam eſſe AB, e cuius extremitate B ducatur chorda BC, et perpendiculum BG, ſitque diameter $AC=a$, $AP=b$, $AB=x$, erit chorda $AM=\sqrt{(AC\times AP)}=\sqrt{ab}$ (Elem. 432), et $AE=x-\frac{1}{2}a$. Ad haec ob triangula AEP et ABG ſimilia erit $AE:AP=AB:AG$, ſeu $x-\frac{1}{2}a:b=x:AG$, vnde $=AG\frac{bx}{x-\frac{1}{2}a}=\frac{2bx}{2x-a}$: item ob triangula ABC et ABG ſimiliä erit $AC:AB=AB:AG$, ſeu $a:x=x:\frac{2bx}{2x-a}$; quare $x^2=\frac{2abx}{2x-a}$, ſeu $x=\frac{2ab}{2x-a}$, vnde $2x^2-ax=2ab$, et $x^2-\frac{1}{2}ax=ab$, adeoque $x=\frac{1}{4}a\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}a^2+ab\right)}$.

Conſtr. Conſtruatur triangulum rectangulum, cuius cateti ſint $\frac{1}{4}a$, et $AM=\sqrt{ab}$, erit eiuſdem hypotenuſa $=\sqrt{\left(\frac{1}{16}a^2+ab\right)}$, cui adiecta quarta diametri parte $\frac{1}{4}a$, obtinebitur chorda quaeſita $AB=x$.

237. *Coroll.* Si fuerit $AP=AD$, ſeu $b=\frac{1}{2}a$, erit $x=\frac{1}{4}a+\sqrt{\left(\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{8}a^2\right)}=\frac{1}{4}a+\sqrt{\frac{9}{16}a^2}=a$; id eſt, ſi ordinata PM erigatur in ipſo centro, chorda quaeſita AB abibit in diametrum AC. Si fuerit $b>\frac{1}{2}a$, ſeu ſi punctum P vltra centrum remoueatur, fiet $x>a$, adeoque chorda quaeſita ex puncto A ducenda erit impoſſibilis: at ducta ab altero extremo C poſſibilis erit.

238. *Probl. Datum angulum rectum* ABC *in tres aequales partes diuidere.* Fig. 41.

Reſol. Concipiatur angulus datus iam eſſe in tres aequales partes diuiſus per rectas BE et BF, fiatque $BC=a$, et e puncto C erigatur perpendiculum CF occurrens rectis BE et BF in punctis E et F, ſitque $CE=x$, erit $BE=\sqrt{(BC^2+CE^2)}=\sqrt{(a^2+x^2)}$: cumque angulus EBF ſit = ABF ex hypotheſi, ac $ABF=BFE$, erit etiam $EBF=BFE$, et hinc $BE=EF$, ac proinde $CF=x+\sqrt{(a^2+x^2)}$. Ad haec cum ſit angulus $CBE=EBF=BFE$, ſimilia erunt triangula FBC et EBC, vnde $BC:CE=CF:BC$, ſeu $a:x=x+\sqrt{(a^2+x^2)}:a$, et hinc $a^2=x^2+x\sqrt{(a^2+x^2)}=x^2+\sqrt{(a^2x^2+x^4)}$, ſiue $a^2-x^2=\sqrt{(a^2x^2+x^4)}$, et eleuando vtrinque ad quadratum $a^4-2a^2x^2+x^4=a^2x^2+x^4$, et hinc $a^4=3a^2x^2$, et $a^2=3x^2$, vnde $x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}a^2$.

Conſtr. In latere BC producto capiatur $CD=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}a$, ac recta BD tanquam diametro deſcribatur circulus, erit eiuſdem ordinata $CE=\sqrt{(BC\times CD)}=\sqrt{\frac{1}{3}a^2}=x$. Quare ſi e puncto E ducatur recta EB, ac in recta CE producta capiatur $EF=BE$, ducaturque recta FB, erit angulus ABC diuiſus in tres aequales partes. Cum enim ſit $CE=\sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, erit $BE=EF=\sqrt{(BC^2+CE^2)}=\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{3}a^2\right)}=\sqrt{\frac{4}{3}a^2}$, adeoque $CF=\sqrt{\frac{1}{3}a^2}+\sqrt{\frac{4}{3}a^2}$, et $CF^2=\frac{5}{3}a^2+2a\sqrt{\frac{4}{9}a^2}$, quare $BF=\sqrt{(BC^2+CF^2)}=\sqrt{\left(a^2+\frac{5}{3}a^2+2a\sqrt{\frac{4}{9}a^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}a^2+\frac{4}{3}a^2\right)}=\sqrt{\frac{12}{3}a^2}=\sqrt{4a^2}=2a$, vnde $BF:BC=2a:a=2:1$, et $EF:EC=\sqrt{\frac{4}{3}a^2}:\sqrt{\frac{1}{3}a^2}=2:1$; ergo $BF:BC=EF:EC$; hinc angulus $FBE=EBC$; et quia $BE=EF$, erit angulus $FBE=BFE=ABF$, ſeu $EBC=FBE=ABF$. Ope radicis negatiuae Ce ſimiliter diuideretur angulus prioris contiguus *aBc*.

Scho-

Scholion. Commodiorem problematis huius reſolutionem inſinuabimus in ſequentibus: praeſentem attulimus tironis duntaxat exercendi gratia.

239. *Probl. Per data duo puncta* A *et* B *ducere circulum, qui alium circulum* DL *in eodem plano poſitum, ac tam poſitione, quam magnitudine datum, tangat.* Fig. 42.

Reſol. Data puncta A et B connectantur per rectam AB, quae erit chorda circuli ducendi, adeoque ſi bifariam, et perpendiculariter ſecetur per rectam indefinitam EI, erit in hac recta circuli ducendi centrum, quod ponamus eſſe F, e quo ſi ad centrum circuli dati C ducatur recta FC, erit punctum contactus in D: ducatur porro recta FB, erit FB=FD. Deinde ex centro C demittatur ad rectam EI perpendiculum CG, ſitque EG $=a$, EB $=b$, CG $=c$, CD $=d$, GF $=x$, FB=FD $=y$ erit $FC^2 = GC^2 + GF^2$, ſeu $y^2 + 2dy + d^2 = c^2 + x^2$; item $FB^2 = EB^2 + FE^2$, ſeu $y^2 = b^2 + a^2 - 2ax + x^2$: tollendo iam aequationem poſteriorem a praecedente erit $2dy + d^2 = c^2 - b^2 - a^2 + 2ax$, ſeu $2dy - 2ax = c^2 - b^2 - a^2 - d^2$. Fiat $m^2 = c^2 - b^2 - a^2 - d^2$, quaeraturque ad $2a$ et ad m tertia proportionalis n, erit $2an = c^2 - b^2 - a^2 - d^2$, et hinc $2dy - 2ax = 2an$, ſeu $dy = ax + an$; vnde $y : n + x = a : d$. Denique fiat GH $=n$, erit FH $=n+x$, et hinc FD : FH $= a : d$; ducatur item recta HD, ac eidem per centrum C parallela CI, erit FD : FH = DC : HI, ſiue $a : d$ = DC : HI, id eſt $a : d = d :$ HI, vnde HI $= \frac{d^2}{a}$.

Conſtr. Fiat HG $=n$, HI $= \frac{d^2}{a}$, et ducatur recta IC, et huic e puncto H parallela HL ſecans dati circuli peripheriam in punctis D et L: per puncta C et D ducatur recta CF occurrens rectae EI alicubi in F, erit F centrum circuli deſcribendi.

240. *Coroll.* 1. Similiter si per puncta L et C ducatur recta occurrens alicubi rectae EI, punctum illud occursus erit centrum secundi circuli problemati satisfacientis, ac datum circulum concauitate sua tangentis.

241. *Coroll.* 2. Si punctum F caderet infra punctum G, recta FE foret tunc $=a+x$, non $a-x$; constructio autem eodem plane pacto perficeretur.

242. *Coroll.* 3. Si foret $b^2+a^2+d^2>c^2$, ponendum esset $b^2+a^2+d^2-c^2=m^2$, quo casu quantitas n foret negatiua, adeoque punctum H sumi deberet ex parte opposita puncti G.

Fig. 43. 243. *Probl. Datis duobus circulis concentricis* ABG *et* HFI, *et dato in peripheria maioris puncto* A, *ducere chordam* AB, *quae minoris circuli peripheriam ea lege secet, vt sit* AE=FB.

Resol. Concipiatur ducta iam esse chorda eiusmodi AB, ducanturque radii GA=b, CH=a, et e puncto E demittatur ad radium AC perpendiculum EM, sitque CM=x, erit HM=$a-x$, MI=$a+x$, adeoque EM=$\sqrt{(HM\times MI)}=\sqrt{(a^2-x^2)}$; item erit MA=$b-x$, et hinc AE=$\sqrt{(ME^2+MA^2)}=\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}$. Ducatur porro chorda BG, similia erunt triangula rectangula AEM et ABG; vnde AE: AM=AG: AB, seu $\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}:b-x=2b:$ AB, vnde AB=$\frac{2b^2-2bx}{\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}}$: est vero AE×AF=AH×AI (Elem. 422); quare AF: AI=AH: AE, seu AF: $a+b=b-a:\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}$, et hinc AF=$\frac{(a+b)\times(b-a)}{\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}}$, adeoque FB=AB−AF $=\frac{2b^2-2bx+a^2-b^2}{\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}}=\frac{b^2-2bx+a^2}{\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}}=\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}$; atqui ex problematis conditione est AE=FB: ergo $\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}=\sqrt{(a^2-2bx+b^2)}$, quae aequatio cum identica sit, quaecunque chorda ducatur ex A occurrens peripheriae circuli minoris,

semper erit AE=FB (211). Idem facile patet demisso in chordam quamlibet perpendiculo CD; erit enim semper AD=DB, et ED=DF, adeoque etiam AE=FB.

244. *Probl. Construere triangulum* ABC, *cuius latera* AC, CB, BA, *et perpendiculum* BD *sint in continua proportione.* Fig. 44.

Resol. Assumatur pro arbitrio latus vnum $AB=a$, sitque latus $BC=x$, erit ex conditione problematis $a:x=x:AC$, vnde $AC=\frac{x^2}{a}$; erit item $x:a=a:BD$, vnde $BD=\frac{a^2}{x}$, et hinc $AD=\sqrt{(AB^2-BD^2)}=\sqrt{\left(a^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}$, et $DC=\sqrt{(BC^2-BD^2)}=\sqrt{\left(x^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}$: ergo $AD+DC=AC=\sqrt{\left(a^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(x^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}=\frac{x^2}{a}$, et hinc $\frac{x^2}{a}-\sqrt{\left(x^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}=\sqrt{\left(a^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}$, et eleuando vtrinque ad quadratum $\frac{x^4}{a^2}-\frac{2x^2}{a}\sqrt{\left(x^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}+x^2-\frac{a^4}{x^2}=a^2-\frac{a^4}{x^2}$, seu $\frac{x^4}{a^2}+x^2-a^2=\frac{2x^2}{a}\sqrt{\left(x^2-\frac{a^4}{x^2}\right)}$, ac rursus eleuando ad quadratum $\frac{x^8}{a^4}+\frac{2x^6}{a^2}+x^4-2x^4-2a^2x^2+a^4=\frac{4x^6}{a^2}-4a^2x^2$, seu $\frac{x^8}{a^4}-x^4+a^4=\frac{2x^6}{a^2}-2a^2x^2$, ac tollendo fractiones $x^8-2a^2x^6-a^4x^4+2a^6x^2+a^8=0$, et radicem quadratam extrahendo $x^4-a^2x^2-a^4=0$, vnde eruitur $x^2=\frac{1}{2}a^2\pm\sqrt{\frac{5}{4}a^4}=\frac{a^2\pm\sqrt{5a^4}}{2}$, et $x=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2\pm\sqrt{5a^4}}{2}\right)}$.

Constr. Cum sit $5a^4>a^2$, duae radices $\pm\sqrt{\left(\frac{a^2-\sqrt{5a^4}}{2}\right)}$ imaginariae sunt; adeoque duae tantum reales $\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+\sqrt{5a^4}}{2}\right)}$ possunt construi. Igitur super recta indefinita AF capiatur $AB=a$, $BL=\sqrt{5a^2}=a\sqrt{5}$, $LF=\frac{1}{2}a$, ac diametro AF describatur semi-

circulus, et e puncto L erigatur ordinata LN perpendicularis, erit $LN=\sqrt{(AL\times LF)}=\sqrt{\left(\frac{a^2+a^2\sqrt{5}}{2}\right)}=x$. Diuidatur recta AL bifariam in puncto K, erit $AK=\frac{1}{2}AL=\frac{a+\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{x^2}{a}$; ducatur deinde radio AK arcus KI, et ex puncto B erigatur recta $BC=LN$ occurrens arcui KI alicubi in puncto C, ad quod ex A ducatur recta AC, in quam ex B demittatur perpendiculum BD, erit ABC triangulum desideratum. Cum enim fit $AB=a$, $BC=x=\sqrt{\left(\frac{a^2+a^2\sqrt{5}}{2}\right)}$, $AC=AK=\frac{x^2}{a}=\frac{a+\sqrt{5a^2}}{2}$, erit $AC:BC=BC:AB$, seu $\frac{x^2}{a}:x=x:a$. Item $AB^2+BC^2=a^2+\frac{a^2+a^2\sqrt{5}}{2}=\frac{3a^2+a^2\sqrt{5}}{2}=\frac{6a^2+2a^2\sqrt{5}}{4}$, quod est $=AC^2$: ergo angulus ABC rectus est, adeoque $AC:BC=AB:BD$; atqui supra fuit $AC:BC=BC:AB$, ergo $BC:AB=AB:BD$, id est rectae AC, BC, AB, BD sunt in continua proportione. Eadem esset pro radice negatiua constructio infra rectam AF.

Fig. 45. 245. *Probl. E dati quadrati* ABCD *angulo* A *ducere rectam* AF *lateri opposito* BC *producto ea lege occurrentem, vt pars eiusdem* EF *aequalis sit rectae datae.*

Resol. Cogitetur recta illa AF iam esse ducta, cuius pars EF debeat aequari datae rectae b: erigatur e puncto F ad eandem perpendiculum FH occurrens lateri AD producto alicubi in H, et ex puncto F ad rectam AH demittatur perpendicularis FG; cum triangula AED et FGH triangulo AFG similia sint, sunt etiam inter se similia; cumque sit $FG=CD=BA$, erit quoque $FH=AE$. Sit iam $AD=DC=a$. $AE=FH=y$, $DH=x$, erit $AF=EF+AE=b+y$, $AH=AD+DH=a+x$, ac in triangulis ADE et AFH similibus erit $AD:AE=AF:AH$, seu $a:y=b+y:a+x$, vnde $a^2+ax=y^2+by$. Denique in triangu-

lo AFH rectangulo $AH^2 = AF^2 + FH^2$, seu $a^2 + 2ax + x^2 = 2y^2 + 2by^2 + b^2$, ac pro $y^2 + by$ ponendo $a^2 + ax$ erit $a^2 + 2ax + x^2 = 2a^2 + 2ax + b^2$, et hinc $x^2 = a^2 + b^2$, et $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Constr. Producatur latus quadrati AB ita, vt fiat $AM = b$, erit ducta hypotenusa $DM = \sqrt{(AD^2 + AM^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)} = x$. Capiatur ergo in latere AD producto $DH = AM$, ac diametro AH describatur semicirculus, secabit is latus quadrati BC productum in puncto F, ad quod si ex A ducatur recta AF, erit $EF = b$.

246. *Probl. Data diametro semicirculi* AB, *et partibus eiusdem vtrinque a centro* CD *et* CE, *erectis ibidem perpendiculis* DH *et* EF, *in perpendiculo* DH *producto inuenire punctum* G *eiusmodi, vt ducta ad illud recta* FG *fiat* $FG \times FE = AC \times BE$. Fig. 46.

Resol. E puncto F ducatur recta FH diametro AB parallela, sitque $CA = r$, $CD = a$, $CE = b$, $HG = x$, erit $EF = DH = \sqrt{(CF^2 - CE^2)} = \sqrt{(r^2 - b^2)}$; cumque sit $HF = CD + CE$, erit $FG = \sqrt{(HF^2 + HG^2)} = \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)}$: quare ex problematis conditione $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)} \times \sqrt{(r^2 - b^2)} = ar + br$, seu eleuando vtrinque ad quadratum, et reapse multiplicando erit $a^2r^2 + 2abr^2 + b^2r^2 + r^2x^2 - a^2b^2 - 2ab^3 - b^4 - b^2x^2 = a^2r^2 + 2abr^2 + b^2r^2$, seu $r^2x^2 - b^2x^2 - a^2b^2 - 2ab^3 - b^4 = 0$, vnde $x^2 = \frac{a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{r^2 - b^2}$, et $x = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{r^2 - b^2}\right)} = \frac{\pm ab \pm b^2}{\sqrt{(r^2 - b^2)}}$.

Constr. Aequatione in proportionem resoluta erit $\sqrt{(r^2 - b^2)} : a + b = b : x$, seu $EF : HF = CE : x$; cum ergo anguli GHF et FEC recti sint, fiat angulus GFH vel gFH $=$ EFC, similia erunt triangula EFC et GFH vel gFH, et punctum G vel g erit punctum quaesitum; illud nimirum respectu radicis positiuae, hoc respectu negatiuae. Erit enim FG vel Fg : FH $=$ FC seu AC : FE, vnde $FG \times FE$ vel $Fg \times FE = FH \times AC = AC \times DE$.

247. *Coroll.* Respectu radicis positiuae commodior futura est constructio, si ad punctum F ducatur tangens FG, perpendiculo DH producto occurrens alicubi in puncto G: cum enim tunc anguli GFC et HFE recti sint, sublato angulo communi HFC remanebunt anguli GFH et CFE aequales, vnde cetera consequuntur, vt supra.

Fig. 47. 248. *Probl. Datis in recta quapiam indefinita* QS *tribus punctis* A, B, C, *inuenire quartum* M, *ita vt recta* AM *sit tertia proportionalis post rectas* AC *et* BM.

Resol. Sit $AB=a$, $AC=b$, $BM=x$, erit $AM=a+x$: quare ex conditione problematis $b:x=x:a+x$, vnde $x^2=ab+bx$, seu $x^2-bx=ab$, et $x=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2+ab\right)}=\frac{b\pm\sqrt{(4ab+b^2)}}{2}$.

Constr. Fiant rectae BO et BK aequales rectae AC, seu b, item $OQ=4AB=4a$, erit $BQ=4a+b$; deinde diametro QK describatur circulus, et ex puncto B erigatur ordinata perpendicularis BN, quae erit $=\sqrt{(BQ\times BK)}=\sqrt{(4ab+b^2)}$, in qua producta fiat $BR=AC=b$, erit $NR=b+\sqrt{(4ab+b^2)}$, ac eius dimidium $TR=\frac{b+\sqrt{(4ab+b^2)}}{2}=x$, cui si fiat aequalis recta BM, erit M punctum quaesitum. Pro radice autem negatiua erit $Rn=b-\sqrt{(4ab+b^2)}$, ac dimidium eiusdem $Rt=\frac{b-\sqrt{(4ab+b^2)}}{2}=x$, cui si fiat aequalis recta Bm, erit m punctum quaesitum.

Scholion. Tametsi puncta M et m ex problematis conditione sint determinata, adeoque eidem euidenter satisfaciant, iuuabit tamen in tironis gratiam ex ipsa constructione demonstrare puncta illa habere conditionem in problemate propositam, seu obtinere proportiones $AC:BM=BM:AM$, et $AC:Bm=Bm:Am$.

Et 1) quidem pro puncto M describantur rectangula ABTL, ABRI, BREM, ducanturque diagonales BL et BE, iacebunt illae in directum: cum enim sit $TR=\frac{b+\sqrt{(4ab+b^2)}}{2}$, erit $BT=TR-BR=\frac{\sqrt{(4ab+b^2)}-b}{2}$, et hinc $TR\times BT=ab=AB\times BR$, adeoque $BR:TR=BT:AB$, seu $ME:BM=AL:AB$: quare rectae BL et BE iacebunt in directum, et similia erunt triangula LIE et BRE, vnde $BR:RE=LI:IE$, seu $AC:BM=BM:AM$.

2) Pro puncto m cum sit $Bn=-\sqrt{(4ab+b^2)}$, et $Rt=tn=\frac{b-\sqrt{(4ab+b^2)}}{2}$, erit $Bt=Bn-tn=\frac{-b-\sqrt{(4ab+b^2)}}{2}$, adeoque $Bt\times Rt=ab=AB\times BR$. Formetur porro rectangulum $ABtl$, ac ducatur diagonalis Bl, cum fuerit $Bt\times Rt=AB\times BR=lt\times BR$, erit $Bt:lt=BR:Rt$; sed etiam est $Bt:lt=BR:RP$: ergo $BR:Rt=BR:RP$, vnde $Rt=RP=Bm$: quare $RI-RP=AB-Bm$, seu $IP=Am$. Denique ob triangula BRP et IP*l* similia est $BR:RP=Il:IP$: ergo pro BR ponendo AC, pro Il ponendo $Rt=RP=Bm$, et pro IP ponendo Am, erit $AC:Bm=Bm:Am$.

249. *Probl. Si in dati semicirculi* AHB *diametro producta assignetur punctum quodcunque* M, *ex eodem ducere secantem* MH *ea lege, vt pars eiusdem* DH *aequetur radio* AC. Fig. 48.

Resol. Sit ea secans MH, radius $AC=c$, $MB=a$, $MA=b$, $MD=x$, erit ex conditione problematis $DH=c$, adeoque $MH=c+x$: est autem $MH:MB=MA:MD$ (Elem. 422), seu $c+x:a=b:x$, ergo $x^2+cx=ab$, vnde $x=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+ab\right)}-\frac{1}{2}c$.

Constr. In recta BM producta capiatur $MN=MA=b$, ac diametro NB describatur semicirculus NQB, tum e puncto M

erigatur perpendiculum MQ, quod erit $=\sqrt{(MN\times MB)}=\sqrt{ab}$. Rurſus ad hanc in puncto Q erigatur perpendiculum $QR=\frac{1}{2}c$, erit hypotenuſa $MR=\sqrt{(QR^2+QM^2)}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+ab\right)}$. Denique centro R radio RQ ducatur ſemicirculus PQT, erit $MP=MR-PR=MR-QR=\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+ab\right)}-\frac{1}{2}c=x$. Quare ſi radio MP centro M interſecetur peripheria ſemicirculi dati in puncto D, erit D punctum illud, per quod ex M ducta ſecante MH fiat $DH=AC$. Pro radice autem negatiua erit $MT=\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+ab\right)}+\frac{1}{2}c$, adeoque negatiue ſumta $=-\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+ab\right)}-\frac{1}{2}c=x$: fiat ergo $Nb=AB$, ac eadem tanquam diametro deſcribatur inferior ſemicirculus Ndb, ac centro M radio MT interſecetur in puncto d, erit d punctum illud, ad quod ex M ducta ſecante Md fiat $dh=Nc$.

Scholion. Iuuabit iterum in tironum gratiam e conſtructione ipſa demonſtrare puncta D et d, legitime eſſe determinata. Eſt nimirum $MH\times MD=MB\times MA$, ſeu $MH\times\left(\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}-\frac{1}{2}c\right)=ab$, vnde $MH=\frac{ab}{\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}-\frac{1}{2}c}$, adeoque $DH=MH-MD=\frac{ab}{\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}-\frac{1}{2}c}-x=\frac{ab}{\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}-\frac{1}{2}c}-\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+ab\right)}+\frac{1}{2}c$, ſeu reducendo ad eundem denominatorem erit $DH=\frac{-\frac{1}{4}c^2+c\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}}{\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}-\frac{1}{2}c}=c=AC$.

Similiter $Mb\times Md=MN\times Mb$, ſeu $Mh\times\left(-\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}-\frac{1}{2}c\right)=-ab$, adeoque $Mh\times\left(\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}+\frac{1}{2}c\right)=ab$, vnde $Mh=\frac{ab}{\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}+\frac{1}{2}c}$, et hinc $dh=Md-Mb=-\frac{1}{2}c-\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+ab\right)}-ab$

$-\frac{ab}{\frac{1}{2}c+\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}}$, seu reducendo ad eundem denominatorem erit $dh=\frac{-\frac{1}{2}c^2-c\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}}{\frac{1}{2}c+\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+ab)}}=c=Nc=AC.$

CAPVT IV.

De variis earundem conſtructionum adplicationibus ad Problemata Phyſica et Mechanica.

250. *Probl. Si e dati plani inclinati* BC *punctis datis* B *et* N *eodem momento demittantur duo corpora, inuenire in plano horizontali* AD *punctum* D, *in quo concurrent.* Fig. 49.

Reſol. Sit plani dati longitudo $BC=a$, pars eiuſdem $NC=b$, $CD=x$, erit tempus deſcenſus corporis primi per planum BC ad tempus deſcenſus ſecundi per planum NC, vt $\sqrt{BC}:\sqrt{NC}=\sqrt{a}:\sqrt{b}$, in qua ipſa ratione erunt amborum velocitates in puncto C acquiſitae, vt oſtendimus in phyſica: quare tempus quo primum corpus motu aequabili celeritate in C acquiſita percurreret planum BC, erit ad tempus, quo ſecundum corpus motu aequabili celeritate in C acquiſita percurreret planum NC, vt $\frac{2a}{\sqrt{a}}:\frac{2b}{\sqrt{b}}$; tempus autem, quo ambo a puncto C ad D perueniunt, eſt in ratione directa ſpatii CD, ſeu x, et reciproca celeritatum: hinc tempus primi erit ad tempus ſecundi vt $\frac{x}{\sqrt{a}}:\frac{x}{\sqrt{b}}$; quia vero haec corpora ſimul demittuntur, et ſimul perueniunt ad punctum D, erunt ſummae temporum vtriuſque aequales, ſeu $\frac{2a+x}{\sqrt{a}}=\frac{2b+x}{\sqrt{b}}$, ac eleuando ad quadratum, et tollendo fractiones, $4a^2b+4abx+bx^2=4ab^2+4abx+ax^2$, ſeu $4a^2b+bx^2=4ab^2+ax^2$, vnde $x^2=\frac{4a^2b-4ab^2}{a-b}=4ab$, et hinc $x=\pm 2\sqrt{ab}$.

Conſtr. Inter rectas BC et NC inueniatur media proportionalis MC, erit ea $= \sqrt{ab}$, vnde $2MC = 2\sqrt{ab} = x$. Fiat ergo $CD = 2MC$, erit in D punctum concurſus. Radix negatiua exhiberet idem punctum a C verſus A, ſi planum BC ad dextram verſus D poneretur inclinatum.

Fig. 50. 251. *Probl. Si e punctis* A *et* B *per planum* AM *duo globi diuerſis temporibus demittantur ita, vt globus* B *tunc demum incipiat moueri, dum alter* A *iam peruenit ad datum punctum* C, *inuenire locum concurſus eorundem* M.

Reſol. Sit $AC = a$, $AB = b$, $BM = x$, erit tempus globi A per ſpatium $AC = \sqrt{a}$, ac tempus eiuſdemque ſpatium $AM = \sqrt{(b+x)}$, tempus globi B per ſpatium $BM = \sqrt{x}$, ac denique tempus globi A per ſpatium $CM = \sqrt{(b+x)} - \sqrt{a}$: erit ergo per conditionem problematis $\sqrt{(b+x)} - \sqrt{a} = \sqrt{x}$, ſeu $\sqrt{(b+x)} = \sqrt{a} + \sqrt{x}$, et eleuando vtrinque ad quadratum $b+x = a+x+2\sqrt{ax}$, ſeu $b-a = 2\sqrt{ax}$, et $(b-a)^2 = 4ax$, vnde $x = \frac{(b-a)^2}{4a}$.

Conſtr. Poſtremam aequationem reſoluendo in proportionem erit $4a : b-a = b-a : x$, ſeu $4AC : CB = CB : x$: quare ſi poſt 4AC et CB inueniatur tertia proportionalis BM, erit in M locus concurſus deſideratus.

Fig. 51. 252. *Probl. Si globo* A *per rectam* AB *deſcendere incipiente, alter globus* B *per eandem rectam ipſi obuiam ire incipiat ea velocitate, quae labendo per rectam* AB *acquireretur, inuenire punctum concurſus eorundem* M.

Reſol. Sit data recta $AB = a$, $AM = x$, erit $BM = a-x$, et velocitas, qua globus B aſcendere incipit $= \sqrt{a}$. Quia vero in motu aequabili velocitates intra idem tempus ſunt vt ſpatia, et globus, qui motu accelerato decurrit datum ſpatium, eodem tempore motu aequabili, celeritate finali decurreret duplum ſpa-

tium, erit celeritas globi A per ſpatium AM ad celeritatem, qua globus B moueri incipit, vt $2AM : 2BM = 2x : 2a - 2x$, hoc eſt $\sqrt{x} : \sqrt{a} = 2x : 2a - 2x$, vnde $2x\sqrt{a} = 2a\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}$, ac eleuando vtrinque ad quadratum $4ax^2 = 4a^2x - 8ax^2 + 4x^3$, ſeu $4ax = 4a^2 - 8ax + 4x^2$, et hinc $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, adeoque $x = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4}a^2 - a^2\right)} = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$.

Conſtr. E puncto B erigatur ad rectam AB perpendicularis indefinita BD, quae centro A radio $AC = \frac{3a}{2}$ interſecetur in puncto C, erit $AC^2 = \frac{9}{4}a^2$, adeoque $AC^2 - AB^2 = BC^2 = \frac{9}{4}a^2 - a^2 = \frac{5}{4}a^2$, et hinc $BC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Quare radio CB ducatur arcus BE occurrens rectae AC alicubi in E, erit $AE = AC - CE = AC - CB = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2} = x$. Si ergo fiat $AM = AE$, erit in M punctum concurſus quaeſitum. Radix altera aequationis $\frac{-3a + a\sqrt{5}}{2} = Ae = Am$ exhiberet punctum m, in quo concurrerent globi A et B verſus eandem plagam delati.

253. *Probl. Incumbat cylinder homogeneus* AB *fulcris* A, *et* B, *ac detur pondus* P *omnium eorum maximum, quae in medio puncto* C *adpenſa cylinder ſuſtentare poteſt, inuenire punctum* D, *in quo adpendi debet pondus aliud maius datum* mP, *quod omnium eorum maximum ſit, quae ab eodem illo cylindro in loco* D *ſuſtentari poſſunt.* Fig. 52.

Reſol. Sit $AC = a$, $CD = x$, erit $BD = a + x$, $AD = a - x$. Iam cum pondera P et mP in punctis C et D adpenſa debeant eſſe in aequilibrio cum cylindri reſiſtentia, debent eſſe etiam in aequilibrio ſecum ipſis: erit ergo ex natura aequilibrii $P : mP = AD \times DB : AC^2$, ſeu $1 : m = a^2 - x^2 : a^2$, vnde $x^2 = \frac{a^2m - a^2}{m} = a^2 - \frac{a^2}{m}$, et $x = \pm\sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{m}\right)}$.

Conſtr. Super recta $AC=a$ deſcribatur ſemicirculus, et fiat $\sqrt{m}:\sqrt{a}=\sqrt{a}:\frac{a}{\sqrt{m}}$, ducaturque chorda $AE=\frac{a}{\sqrt{m}}$, ac puncta E et C connectantur chorda EC, qua tanquam radio, centro C, ducatur arcus ED occurrens cylindro alicubi in puncto D, erit $EC=CD=\sqrt{(AC^2-AE^2)}=\sqrt{\left(a^2-\frac{a^2}{m}\right)}=x$, et hinc D punctum quaeſitum. Quodſi arcus DE ex parte dextra continuetur, donec occurrat cylindro in puncto *d*, erit C*d* radix negatiua aequationis, et punctum *d* perinde ſatisfaciet problemati.

Fig. 53. 254. *Probl. Data velocitate, quam flumen habet in dato aliquo loco, inuenire altitudinem fontis, vnde emanat.*

Reſol. Sit alueus fluminis AB, altitudo aquae perpendicularis in loco dato B ſit BD, altitudo fontis AC. A dato loco B concipiatur ducta recta CB horizonti parallela occurrens fontis altitudini in puncto C. Deinde in altitudine aquae BD ſumantur pro arbitrio duo quaeuis puncta M et N, ſitque velocitas aquae in locis M et N vt *m* et *n*, ac differentia altitudinum $MN=b$. Producatur recta BD ita, vt fiat $BF=CA$, ſitque $FM=x$, erit $FN=b+x$. Porro velocitates aquae ſunt ad ſenſum vt radices altitudinum, adeoque velocitas aquae in loco M ad velocitatem eiuſdem in loco N, vt $\sqrt{FM}:\sqrt{FN}$, id eſt, $m:n=\sqrt{x}:\sqrt{(b+x)}$, ac eleuando ad quadratum $m^2:n^2=x:b+x$, vnde $x=\frac{bm^2}{n^2-m^2}$.

Conſtr. Fiat $m:n+m=n-m:\frac{n^2-m^2}{m}$. Fiat rurſus $\frac{n^2-m^2}{m}:b=m:\frac{bm^2}{n^2-m^2}=x=FM$, cui addita altitudine BM obtinebitur altitudo fontis quaeſita $BF=CA$.

Fig. 54. 255. *Probl. Data grauitate ſpecifica fluidi, et virgae homogeneae* AB *extremo* A *de filo ſuſpenſae, et altero* B *libere innatantis fluido, inuenire partem eiuſdem demerſam* BC.

Reſol. Sint grauitates ſpecificae fluidi et virgae vt $m:n$, longitudo virgae $AB=2a$, adeoque $AR=RB=a$, $CB=2x$, ac dimidium eiuſdem $BD=CD=x$, erit $AD=2a-x$. Iam virga in hoc ſitu ſpectari poteſt tanquam vectis habens hypomochlium in puncto A, cui vires adplicatae, ſeu pondera adpenſa intelligantur in punctis mediis R et D, ſeu concipiatur totum virgae pondus collectum in centro grauitatis R, ac aequari ponderi ibidem adpenſo S, cuius directio ſit RS: quia vero fluidum conatur attollere partem demerſam BC directione oppoſita DF, concipiatur ſumma omnium horum conatuum collecta in centro D, et aequalis eſſe ponderi T ſurſum vrgenti. Iam cum niſus fluidi contra virgam ſurſum aequilibretur cum niſu virgae deorſum, amborum momenta, ſeu actiones ponderum S et T inter ſe aequales eſſe debent.

Porro ſumma niſuum virgae collecta in centro R coaleſcit e volumine virgae AB ducto in grauitatem eiuſdem ſpecificam, adeoque eſt $=2an$; et ſumma niſuum fluidi collecta in centro D coaleſcit e volumine fluidi reſpondentis parti demerſae BC ducto in grauitatem eiuſdem ſpecificam, ac proinde eſt $=2mx$. Igitur e puncto A in directiones niſuum ES et TF demittatur perpendiculum AF, erit ex natura vectis $S:T=AF:AE$; ac ob triangula AER et AFD ſimilia $AF:AE=AD:AR$: ergo etiam $S:T=AD:AR$, ſeu $2an:2mx=2a-x:a$, vnde $2a^2n=4amx-2mx^2$, ſiue $mx^2-2amx+a^2n=0$, et hinc $x=a+\sqrt{\left(\frac{a^2m-a^2n}{m}\right)}=a\pm a\sqrt{\left(\frac{m-n}{m}\right)}$, et $2x=2a\pm 2a\sqrt{\left(\frac{m-n}{m}\right)}$.

Conſtr. Fiat AB ad BM vt grauitas ſpecifica fluidi ad grauitatem ſpecificam virgae, erunt eae grauitates, vt $2a:n$, quare in expreſſione radicis $2x$ pro m ſubſtituendo $2a$, erit $2x=2a\pm 2a\sqrt{\left(\frac{2a-n}{2a}\right)}$, et ducendo tam numeratorem, quam denomina-

torem in $\sqrt{2a}$ erit $2x = 2a \pm \frac{2a\sqrt{(4a^2-2an)}}{2a} = 2a \pm \sqrt{(4a^2 - 2an)}$. Quare si radio AR describatur semicirculus ANB, ac ac e puncto M erigatur perpendiculum MN, ducaturque chorda AN, qua tanquam radio describatur alter semicirculus occurrens virgae in puncto C, erit $BC = 2x$. Est enim $BM = \frac{2an}{m}$, adeoque $AM = 2a - \frac{2an}{m} = \frac{2am-2an}{m}$, seu pro m ponendo $2a$ erit $AM = \frac{4a^2-2an}{2a} = 2a - n$: est vero AB: AN = AN: AM, et hinc $AN = AC = \sqrt{(AB \times AM)} = \sqrt{(4a^2 - 2an)}$; quare $BC = AB - AC = 2a - \sqrt{(4a^2 - 2an)} = 2x$. Radix altera aequationis foret = BK.

Fig. 55. 256. *Probl. Data basi* BC, *et altitudine* AO *fornicis* BAC *conflati e tribus arcubus circularibus* BD, DE, EC, *quorum singuli contineant* 60°, *et extremi* BD *et* EC *sint arcus eiusdem circuli, inuenire centra singulorum arcuum.*

Resol. Sint centra quaesita F, G, H, et sit $BO = OC = a$, $AO = b$, $OG = x$: ducantur rectae HFD et HGE, erunt anguli HFG et HGF singuli = 60°, adeoque etiam angulus FHG = 60°, vnde $FG = FH = HG = 2x$. Producatur altitudo AO vsque in H, erit $OH = \sqrt{(FH^2 - FO^2)} = \sqrt{3x^2}$, adeoque $AH = b + \sqrt{3x^2}$; erit item $BF = a - x$, et hinc $DH = a - x + 2x = a + x$, cumque sit DH = AH, erit $a + x = b + \sqrt{3x^2}$, seu transponendo b, et eleuando vtrinque ad quadratum $a^2 + 2ax + x^2 - 2ab - 2bx + b^2 = 3x^2$, id est $x^2 - ax + bx = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab$, et hinc $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2\right)}$ $= \frac{a-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{(a-b)}{2} \times \frac{(a-b)}{2}\right)}$.

Conſtr. Fiat $CM=AO=b$, $OI=\frac{1}{2}OM$, ac diametro IM deſcribatur ſemicirculus INM, erit $OM=OC-CM=a-b$, et $IO=\frac{a-b}{2}$, adeoque $NO=\sqrt{(IO\times OM)}=\sqrt{\left(\frac{(a-b)}{2}\times(a-b)\right)}$, et chorda $IN=\sqrt{(NO^2+IO^2)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{(a-b)}{2}\times\frac{(a-b)}{2}\right)}$. Fiat ergo $IF=IN$, ſeu $OF=OI+IN$, erit $OF=\frac{a-b}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{(a-b)}{2}\times\frac{(a-b)}{2}\right)}=x$, adeoque in F erit centrum quaeſitum arcus BD, ac facta $OG=OF$, erit in G centrum arcus CE: tum ſuper recta FG conſtructo triangulo aequilatero FGH reperietur etiam punctum H, quod erit centrum arcus DE.

257. *Probl. Globum eburneum* A *poſitione datum in plano ludi tudicularis ſic impellere, vt poſt binas in lateribus plani reflexiones impingat in globum* B *pariter poſitione datum.* Fig. 56.

Reſol. A datis globis A et B demittantur ad latera plani perpendiculares AT et BR, ſintque puncta reflexionum in C et D, ac ducantur rectae AC, CD, DB, et ſit $TO=a$, $AT=b$, $TC=x$, $OR=c$, $BR=d$, erit $CO=a-x$. Iam triangula rectangula ATC, CDO, BDR ſimilia ſunt ob angulos incidentiae aequales angulis reflexionis, adeoque $TC:TA=CO:OD$, ſeu $x:b=a-x:OD$, vnde $OD=\frac{ab-bx}{x}$, et hinc $DR=OR-OD=c-\frac{ab+bx}{x}=\frac{cx-ab+bx}{x}$. Item ob eadem triangula ſimilia $TC:AT=BR:DR$, ſeu $x:b=d:\frac{cx-ab+bx}{x}$; quare $bd=cx-ab+bx$, ac proinde $x=\frac{bd+ab}{c+b}$.

Conſtr. Aequationem poſtremam reſoluendo in proportionem erit $c+b:a+d=b:x$: producatur ergo recta TA ex parte A, donec fiat $TE=b+c$, producatur item TO verſus O

donec fiat $TF = a+d$, deinde connectantur puncta E et F per rectam EF, cui ex puncto A ducatur parallela AC, erit C punctum reflexionis, ad quod dirigendus erit globus A, vt post reflexionem duplicem feriat globum B. Erit enim $TE : TF = TA : TC$, seu $b+c : a+d : b : x$, vnde $TC = x$: quare si globus A directione AC impellatur, reflectetur sub aequali angulo directione CD, et ex D directione DB sub angulo $BDR = CDO$.

Fig. 57. 258. *Coroll.* Si duae illae reflexiones fieri debeant in oppositis eiusdem plani lateribus MP et NO vt globus A feriat globum B, demissis, vt ante, perpendiculis AT et BR, sint puncta reflexionum in C et D, ducanturque rectae AC, CD, DB, item rectae CQ, et DS lateri plani MN parallelae; producatur deinde recta RB donec lateri NO occurrat alicubi G, sitque $AT = a$, $TG = b$, $TC = x$, $RG = QC = DS = c$, $BR = d$, erit $CG = b - x$. Iam similia erunt triangula ATC et CDS, vnde $AT : TC = DS : CS$, seu $a : x = c : CS$, vnde $CS = \frac{cx}{a}$, adeoque $DR = QR - QD = CG - CS = b - x - \frac{cx}{a} = \frac{ab-ax-cx}{a}$. Rursus in triangulis ATC et DBR similibus $AT : TC = BR : DR$, seu $a : x = d : \frac{ab-ax-cx}{a}$, vnde $dx = ab - ax - cx$, et $x = \frac{ab}{a+c+d}$. Si ergo fiat $TE = a+c+d$, ac ducatur recta EG, eidemque ex puncto A parallela AC, erit in C punctum primae reflexionis, ad quod globus A dirigi debet: erit quippe $TE : TG = TA : TC$, seu $a+c+d : b = a : x$, adeoque $TC = x$.

Fig. 58. 259. *Probl. Si ope trochleae fixae* A, *et funis* PAB *pondus* P *moueat globum* B *directione obliqua plani* DC, *inuenire locum globi* B, *vt cum pondere* P *sit in aequilibrio.*

Resol. Ponamus locum quaesitum esse in B. Demittatur ex A ad planum obliquum DC perpendicularis AC, et ex B ducatur

catur recta BE rectae AP, seu directioni ponderis P libere pendentis parallela, referatque AB vim Ponderis P, et BE vim globi P absolutam; resolutis hisce viribus in duas, nempe AC et CB, ac ED et BD, euidens est vires AC et DE a plano immobili DC elidi; restabant adeo solae vires BC et BD, quae ex problematis conditione inter se aequales esse debent. Sit igitur $AC=a$, $CB=x$, erit $AB=\sqrt{(a^2+x^2)}$. Sit pondus $P=m$, pondus absolutum globi $B=n$, erit $AB:BE=m:n$, seu $m:n=\sqrt{(a^2+x^2)}:BE$, et hinc $BE=\frac{n\sqrt{(a^2+x^2)}}{m}$. Quia vero ob datam plani DC positionem datur angulus EBD, datur etiam ratio laterum BE et BD, quae sit $b:m$, erit $b:m=\frac{n\sqrt{(a^2+x^2)}}{m}:BD$, quare $BD=\frac{n\sqrt{(a^2+x^2)}}{b}$: cum ergo debeat esse $BC=BD$, erit $x=\frac{n\sqrt{(a^2+x^2)}}{b}$, ac eleuando vtrinque ad quadratum $x^2=\frac{a^2n^2+n^2x^2}{b^2}$, seu $b^2x^2-n^2x^2=a^2n^2$ et hinc $x^2=\frac{a^2n^2}{b^2-n^2}$, et $x=\frac{an}{\sqrt{(b^2-n^2)}}$.

Constr. Diametro $MN=b$ describatur semicirculus MON, Fig. 59. in quo adplicetur chorda $NO=n$, erit altera chorda $MO=\sqrt{(MN^2-NO^2)}=\sqrt{(b^2-n^2)}$: quare si ad rectas MO, $AB=a$, et NO quaeratur quarta proportionalis $\frac{an}{\sqrt{(b^2-n^2)}}=x$, ac ex puncto C in priore figura transferatur in B, erit B locus aequilibrii quaesitus.

260. *Probl. Incidat radius lucis* AB *in punctum* B *proximum axi speculi sphaerici* HBG, *inuenire punctum* F, *in quo radius reflexus* BF *concurrit cum axe speculi* AD. Fig. 60.

Resol. Sit punctum illud in F, centrum speculi in C, ductis rectis AB, CB, FB erit angulus incidentiae ABC aequalis angulo reflexionis CBF, adeoque recta CB bifariam diuidet an-

gulum ABF, vnde AB: BF = AC: CF, seu ob AB proxime aequalem AD, et FB proxime aequalem FD, erit AD: DF = AC: CF. Sit ergo AD = b, DC = a, CF = x, erit DF = $a - x$, et AC = $b - a$, hinc $b : a - x = b - a : x$, adeoque $bx = ab - bx - a^2 + ax$, siue $2bx - ax = ab - a^2$, et $x = \frac{ab - a^2}{2b - a}$.

Constr. Cum sit $2b - a : b - a = a : x$, quaeratur ad rectas 2AD — DC, AC, et DC quarta proportionalis CF, erit CF = x, et F punctum quaesitum. Quodsi radii a sole veniant, incident in speculum ad sensum paralleli, seu erunt rectae AD et AB parallelae, ac DC respectu AC euanescet, eritque AC = AD, seu $b = b - a$, vnde $x = \frac{ab}{2b} = \frac{1}{2}a$ = CD.

Fig. 61

261. *Probl. Data amplitudine iactus horizontalis* BC, *et vi pulueris pyrii, inuenire directionem, qua excussus e mortario globus scopum datum* C *feriat.*

Resol. Sit data pulueris vis tanta, vt eam globo queat imprimere velocitatem, quae lapsu libero per rectam AB acquireretur, sitque BD quaesita globi directio: erit celeritas labendo per AB acquisita eiusmodi, vt globus eadem motu aequabili intra idem tempus percurreret spatium = 2AB. Porro quo tempore globus motu aequabili percurreret spatium BD, interea labendo percurrit spatium DC: quare cum in motu aequabili eadem celeritate posita spatia sint vt tempora, erunt tempora motus aequabilis per 2AB, et per BD, seu tempora lapsus liberi per AB et DC, vt 2AB, et BD; sunt vero spatia lapsu libero decursa vt quadrata temporum: ergo AB : DC = $4AB^2$: BD^2. Diuidatur iam amplitudo iactus BC in quatuor partes aequales BE, EF, FG, GC, et per singula diuisionum puncta ducantur rectae EM, FN, GO ad AB parallelae, erit BM = MN = NO = OD, et hinc BD = 4BM, et DC = 4ME, adeoque AB : 4ME =

$4AB^2 : 16BM^2 = AB^2 : 4BM^2$, seu antecedentes diuidendo per AB, et consequentes per 4, erit $1 : ME = AB : BM^2$ et hinc $AB \times ME = BM^2$. Sit ergo $AB = 2a$, $DC = 4x$, erit $ME = x$; fit item $BC = 4b$, erit $BE = b$, et hinc $BM^2 = BE^2 + EM^2 = b^2 + x^2$, et $AB \times ME = 2ax$: ergo $2ax = b^2 + x^2$, seu $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, vnde $x = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Constr. Diametro AB describatur semicirculus AQMB, et e puncto E erigatur recta EQ parallela ad AB occurrens peripheriae semicirculi in punctis M et Q, ad quae ex B ductae rectae BM et BQ erunt quaesitae globi directiones, seu erunt EM et $EQ = x$. Nam ducta recta MA, item recta MR ad BC parallela, similia erunt triangula BME et AMB, vnde $AB : BM = BM : ME$, adeoque $AB \times ME = BM^2$, seu $2ax = b^2 + x^2$. Cumque aequatio duas habeat radices, erit $SR = \sqrt{(SM^2 - RM^2)} = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, adeoque $SB - SR = RB = ME = a - \sqrt{(a^2 - b^2)} = x$: et si fiat $SP = SR$, erit $BP = EQ = a + \sqrt{(a^2 - b^2)} = x$: quare scopus C tam directione BM, tam directione BQ feriri potest.

262. *Coroll.* Si recta EQ peripheriam tangat duntaxat, erit $BE = SB$, seu $a = b$, et hinc $x = a$: quare scopus vnica directione per punctum contactus transeunte poterit feriri. Si vero recta EQ peripheriam ne tangat quidem, erit $BE > SB$, seu $b > a$, adeoque $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ erit quantitas imaginaria, et scopus nulla directione possibili poterit eo casu feriri.

SECTIO II.

De Locis Geometricis.

CAPVT I.

De Natura, et Inueſtigatione Locorum Geometricorum.

263. Dum problema geometricum indeterminatum reducitur ad aequationes duas incognitas, ſeu quantitates variabiles continentem, earum vna ſemper poteſt aſſumi pro arbitrio, ac per abſciſſas repraeſentari, atque eo ipſo determinabitur etiam altera, et per ordinatas abſciſſis illis reſpondentes exhibebitur, per quarum extremitates tranſiens linea dicitur *locus geometricus* problematis propoſiti, vel aequationis e problemate enaſcentis.

Fig. 62. E. g. Si duae quaeuis rectae indefinitae AB et CD iungantur ſub quouis angulo, ac poſita in puncto M abſciſſarum origine ſumantur in vna earum abſciſſae poſitiuae ex parte dextra ME, MG, MI etc. aut negatiuae ex parte ſiniſtra M*e*, M*g*, M*i* etc. vel vice verſa, et erigantur ordinatae ipſis correſpondentes, ac rectae alteri AB parallelae EF, GH, IK etc. vel *ef*, *gh*, *ik* etc. recta indefinita PQ per extremitates harum ordinatarum tranſiens erit locus geometricus harum ordinatarum, aut aequationis exprimentis relationem ordinatarum ad ſuas abſciſſas.

264. Rectae autem illae AB et CD, in quarum vna ſumuntur abſciſſae, et alteri ordinatae parallelae ſunt, *axes* abſciſſarum, ac ordinatarum, vel *axes coordinatarum*; et ipſae ab-

ſciſſae, ac ordinatae communi vocabulo *coordinatae* adpellantur. Ad haec angulus QMD continens ordinatas poſitiuas, vocatur *angulus coordinatarum poſitiuarum*; eiuſdem autem verticalis CMP *angulus coordinatarum negatiuarum*.

Scholion. Quoniam problemata geometrica indeterminata plerumque reſoluuntur ope coordinatarum, veteres locum geometricum adpellabant quamuis lineam, cuius quodlibet punctum aeque aptum eſſet reſoluendo problemati geometrico indeterminato. Ita ſi conſtruenda ſint rectangulum, et quadratum inter ſe aequalia, patet quamuis ordinatam circuli ſatisfacere problemati, cum quadratum cuiuslibet aequetur rectangulo abſciſſarum: quare quodlibet peripheriae circuli punctum aptum eſt ſoluendo problemati, adeoque circulus eſt locus praeſentis problematis.

265. Porro locus geometricus pro varia coordinatarum relatione erit linea vel recta vel curua. E. g. locus aequationis $bx = ay$ eſt linea recta, cum ſit $a : b = x : y$; nempe ſi fiat ME$=a$, EF$=b$, et capiatur quaecunque abſciſſa MG$=x$, erit eiuſdem ordinata GH$=y$, et ME : EF$=$MG : GH, adeoque triangula MEF et MGH ſimilia erunt, idque ſemper verum erit, quaecunque aliae ſumantur coordinatae loco MG et GH. At in aequatione $ax = y^2$ non ordinatae ipſae BE, CF, DG etc. ſed earundem quadrata ſunt abſciſſis ſuis AB, AC, AD etc. proportionalia: quare puncta E, F, G etc. non ſunt in linea recta, ſed in curua. Fig. 63.

266. Curuae autem *regulares* illae dicuntur, quae deſcribi poſſunt lege quadam conſtanti, ſingula earundem puncta determinante; ac proinde quarum omnia puncta habent certam quamdam proprietatem ſolis talibus curuis conuenientem. Sic proprietas omnibus peripheriae circuli punctis communis, ac eorundem poſitionem determinans eſt radiorum, ſeu diſtantiarum a centro aequalitas.

267. Si ergo curua quaepiam regularis sit, adest certa quaedam relatio inter eiusdem coordinatas, eaque constans relate ad singula curuae puncta, quae relatio saepe exprimi potest aequatione aliqua algebraica, quae propterea *aequatio ad curuam* dici solet, cuius scilicet naturam exprimit. Porro aequatio huiusmodi etiam ad eandem curuam varia esse potest pro varia coordinatarum positione, gradum tamen semper habet eundem.

Fig. 64. E. g. Sit circulus radio $CM = r$ descriptus, et quaeratur eiusdem aequatio, quae quidem erit varia pro varietate originis abscissarum, dimensionem tamen eandem, seu gradum secundum semper retinebit.

1) Sit origo abscissarum in extremitate F diametri FR, in qua deligatur abscissa quaecunque $FQ = x$, ac ordinata eidem respondens QM sit $= y$, erit $QR = FR - FQ = 2r - x$, et $QM^2 = FQ \times QR$, seu $y^2 = 2rx - x^2$, quae est aequatio circuli abscissis a vertice F computatis, habens locum vbicunque sumatur punctum M in semiperipheria superiore FTR. Si punctum idem sumatur in semiperipheria inferiore FHR vbicunque e. g. in B, erit FQ vt ante $= x$, $QB = -y$, $QB^2 = y^2 = 2rx - x^2$ vt supra. Quare aequatio inuenta communis est omnibus peripheriae punctis.

2) Sit origo abscissarum in centro C, ac deligatur in diametro abscissa quaecunque $CP = x$, et ordinata eidem respondens $PN = y$; in triangulo rectangulo CPN erit $PN^2 = CN^2 - CP^2$, seu $y^2 = r^2 - x^2$, quae est aequatio circuli abscissis a centro computatis, habens locum vbicunque sumatur punctum N in quadrante peripheriae TNR. Si punctum idem sumatur vbicunque in quadrante TMF e. g. in M, erit $CQ = -x$, $QM = y$, $QM^2 = CM^2 - CQ^2$, seu $y^2 = r^2 - x^2$, vt ante. Si punctum idem sumatur vbicunque in quadrante FDH e. g. in B, erit $CQ = -x$,

$QB = -y$, $QB^2 = CB^2 - CQ^2$; ſeu $y^2 = r^2 - x^2$, vt antè. Denique ſi punctum idem ſumatur vbicunque in quadrante HIR e. g. in I, erit $CP = x$, $PI = -y$, $PI^2 = CI^2 - CP^2$, ſeu $y^2 = r^2 - x^2$ vti hactenus. Patet ergo etiam hanc aequationem toti peripheriae communem eſſe.

3) Si abſciſſarum origo ſit extra diametrum vbicunque e. g. in O, ſintque rectae OI et OG axes coordinatarum, ſumatur in peripheria vbicunque punctum M, e quo ducantur rectae MG et MD axibus coordinatarum parallelae, erunt eaedem coordinatae circuli reſpectu puncti M. Quaeratur iam aequatio exprimens relationem huiuſmodi coordinatarum reſpectu omnium peripheriae punctorum; quem in finem ſit $CL = a$, $CK = b$, quae vtique dantur ob datam centri C, et axium OI ac OG poſitionem; ſit item $OD = GM = x$, ordinata $MD = OG = y$, erunt quantitates a, b, r, reſpectu ſingulorum peripheriae punctorum conſtantes, cum earum valor a ſitu puncti M nullatenus pendeat; at x et y erunt variabiles, cum earum diuerſus obueniat valor e diuerſo ſitu puncti M. Erit igitur $QM = MD - QD = MD - CL = y - a$, et $CQ = CK - KQ = CK - OD = b - x$: cum ergo ſit $QM^2 = CM^2 - CQ^2$, erit $y^2 - 2ay + a^2 = r^2 - b^2 + 2bx - x^2$, ſeu $r^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2 - 2ay + a^2$, quae eſt aequatio ad circulum relate ad omnia ſemiperipheriae TMBH puncta. Si punctum M ſumatur vbicunque in altera ſemiperipheria TNIH e. g. in N, erit $NP = NA - AP = GO - CL = y - a$, et $CP = KP - KC = OA - KC = x - b$; quare cum ſit $CN^2 = CP^2 + PN^2$, erit $r^2 = (x - b)^2 + (y - a)^2 = x^2 - 2bx + b^2 + y^2 - 2ay + a^2$ prorſus vt ante. Hinc etiam haec aequatio toti peripheriae communis eſt. Eodem pacto licebit progredi, vbicunque demum collocetur origo abſciſſarum.

268. *Probl. Data aequatione cuius locus ſit aliqua ſectio conica, ſpeciem loci, ad quam ea pertinet, determinare.*

Reſol. Praeſtari id poteſt duplici methodo: primum ope formularum quarumdam generalium, de quibus agemus infra: deinde ope ſimpliciſſimarum aequationum ad quamlibet ſectionem conicam, de quibus hic ſermo erit. Vt igitur dignoſci poſſit, ad quamnam ſectionem conicam pertineat aequatio propoſita, neceſſe eſt ante oculos habere aequationes ſimpliciſſimas ſectionum conicarum, quas hacce tabella exhibemus, quaeque ex Elementis noſtris facile eruuntur.

$y^2 = px$		ad Parab. concau.
$x^2 = py$		ad Parab. conuex.
$y^2 = a^2 - x^2$	abſciſſis a centro computatis	ad circulum
$y^2 = 2ax - x^2$	abſciſſis a vertice computatis	
$\frac{a^2}{b^2}y^2 = x^2 - a^2$	abſciſſis a centro computatis	ad Hyperbolam
$\frac{a^2}{b}y^2 = \pm 2ax + x^2$	abſciſſis a vertice computatis	
$\frac{2a}{p}y^2 = x^2 - a^2$	abſciſſis a centro computatis	
$\frac{2a}{p}y^2 = x^2 \pm 2ax$	abſciſſis a vertice computatis	
$y^2 = x^2 - a^2$	abſciſſis a centro computatis	ad Hyper. aequil.
$y^2 = \pm 2ax + x^2$	abſciſſis a vertice computatis	
$xy = ab$		ad Hyperb. inter aſympt.
$\frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 - x^2$	abſciſſis a centro computatis	ad Ellipſim.
$\frac{a^2}{b^2}y^2 = 2ax - x^2$	abſciſſis a vertice computatis	
$\frac{2a}{p}y^2 = a^2 - x^2$	abſciſſis a centro computatis	
$\frac{2a}{p}y^2 = 2ax - x^2$	abſciſſis a vertice computatis	

Igi-

Igitur aequatio propoſita cum hiſce conferenda erit, vt adpareat, ad quamnam earundem ſpeciem pertineat, id vnum diligenter notando, per a^2 et b^2, quaeuis plana vtcunque complexa, per a, $2a$, p quaſuis lineas deſignari poſſe. E. g. ſi aequatio $y^2 = \frac{3a^2x - 2abx}{c} - x^2$ conferenda eſſet cum ſuperioribus formulis coefficientem $\frac{3a^2 - 2ab}{c}$ ſpectando tanquam vnicam quantitatem d, reducetur ea ad formam $y^2 = dx - x^2$, quam patet eandem eſſe cum formula circuli habentis diametrum $= d$.

Exempla.

I. $y^2 = a^2 - b^2 - x^2$ eſt aequatio ad circulum, cuius radius eſt $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$, vbi ſi fuerit $b > a$, circulus erit imaginarius.

II. $y^2 = \frac{a^2b}{m} - x^2$ eſt aequatio iterum ad circulum, cuius radius eſt $= \sqrt{\frac{a^2b}{m}} = a\sqrt{\frac{b}{m}}$.

III. $y^2 = a\sqrt{ab} - x^2$ eſt aequatio ad circulum, cuius radius eſt $= \sqrt{(a\sqrt{ab})}$.

IV. $y^2 = 2ax - bx - x^2$ eſt aequatio ad circulum abſciſſis a vertice computatis, cuius diameter eſt $= 2a - b$.

V. $y^2 = \frac{a^2x + abx}{b} - x^2$ eſt aequatio ad circulum abſciſſis iterum a vertice computatis, cuius diameter eſt $= \frac{a^2 + ab}{b}$.

VI. $y^2 = x\sqrt{ab} - x^2$ eſt aequatio ad circulum abſciſſis denuo a vertice computatis, cuius diameter eſt $= \sqrt{ab}$.

VII. $y^2 = \frac{a^2x + b^2x}{c}$ eſt aequatio ad parabolam concauam cuius parameter eſt $= \frac{a^2 + b^2}{c}$.

VIII. $y^2 = x\sqrt{ab}$ eſt aequatio ad parabolam concauam, cuius parameter eſt $= \sqrt{ab}$.

IX. $x^2 = y\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$ eſt aequatio ad parabolam conuexam, cuius parameter eſt $= \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$.

X. $\frac{(a^2+f^2)}{b\sqrt{ab}} y^2 = x^2 - a^2 - f^2$ eſt aequatio ad hyperbolam abſciſſis a centro computatis, cuius ſemidiameter transuerſa eſt $= \sqrt{(a^2+f^2)}$, et diameter coniugata $= \sqrt{(b\sqrt{ab})}$.

XI. $\frac{a^3}{b^2c} y^2 = x^2 - \frac{a^2}{c}$ eſt aequatio ad hyperbolam abſciſſis iterum a centro computatis, cuius ſemidiameter tranſuerſa eſt $= \frac{a^3}{c}$, et ſemidiameter coniugata eſt $= b$.

269. *Coroll.* 1. E contemplatione tabellae ſuperioris adparet in hyperbola et ellipſi ad diametros relatis, abſciſſis a centro computatis, radicem quadratam termini conſtantis a^2 ſemper eſſe ſemidiametrum tranſuerſam: et ſiquidem coefficiens quadrati y^2 ſit idem ille terminus conſtans diuiſus per datam aliquam quantitatem e. g. $\frac{a^2}{b^2}$, radicem quadratam diuiſoris, ſeu $\sqrt{b^2}$ ſemper eſſe ſemidiametrum coniugatam. At ſi coefficiens quadrati y^2 terminum illum conſtantem dicto modo non contineat, diuerſa erit ſemidiameter coniugata. E. g. in aequatione $\frac{a^2}{b^2} y^2 = x^2 - a^2$ eſt quidem a ſemidiameter transuerſa, ſed $\sqrt{b^2}$ ſeu b non eſt ſemidiameter coniugata; verum inuenitur inferendo vt numerator coefficientis quadrati y^2 ad denominatorem, ſeu in exemplo ſuperiore vt a^2 ad b^2, ita terminus ille conſtans a^2 ad quadratum ſemidiametri coniugatae.

270. *Coroll.* 2. In iiſdem curuis ad diametros, vt ante relatis, ſed abſciſſis a vertice computatis, dimidium quantitatis $2a$ primam abſciſſae dimenſionem multiplicantis ſemper eſt ſemi-

diameter transuersa: et siquidem coefficiens quadrati y^2 sit quadratum dimidiae eius quantitatis a^2 diuisum per datam aliquam quantitatem e. g. $\frac{a^2}{b^2}$, radix diuisoris erit, vti supra, semidiameter coniugata; secus inuenietur inferendo vt numerator coefficientis quadrati y^2 ad denominatorem, ita quadratum dimidiae quantitatis primam abscissae dimensionem multiplicantis ad quadratum semidiametri coniugatae.

E. g. In aequatione ad hyperbolam $\frac{f^2}{b^2}y^2 = x^2 + 2ax$ semidiameter transuersa est $= a$, semidiameter coniugata est $= \sqrt{\frac{a^2b^2}{f^2}} = \frac{ab}{f}$, id quod facile patet vel inde, quod in hyperbola sit $x^2 + 2ax$ ad y^2 sicut $4a^2$ ad quadratum diametri coniugatae: si ergo pro quadrato illo ponamus inuentum $\frac{4a^2b^2}{f^2}$, erit $x^2 + 2ax : y^2 = 4a^2 : \frac{4a^2b^2}{f^2}$, vnde $\frac{f^2}{b^2}y^2 = x^2 + 2ax$, quae fuit aequatio proposita: quare euidens est quadratum illud rite fuisse inuentum. Item in aequatione $\frac{ab}{c}y^2 = 2ax + x^2$ semidiameter transuersa est $= a$, coniugata $= \sqrt{\frac{ac^2}{b}}$, id quod eodem, quo ante, modo rursus ostendi potest.

271. *Coroll.* 3. In iisdem curuis ad parametrum relatis, abscissis a centro computatis, semidiameter transuersa semper est radix quadrata termini constantis, et parameter semper est denominator coefficientis quadrati y^2, siquidem eius numerator sit duplum radicis termini constantis. Similiter abscissis a vertice computatis semidiameter transuersa semper est dimidium quantitatis primam abscissae dimensionem multiplicantis, et parameter est denominator coefficientis quadrati y^2, siquidem numerator eiusdem sit quantitas illa primam abscissae dimensionem multiplicans. At

in caſu vtroque ſi numerator ille dictas conditiones non habeat, parameter erit quarta proportionalis ad numeratorem illum, ad eius denominatorem, et ad diametrum tranſuerſam.

E. g. In aequatione $\frac{b}{c}y^2 = a^2 - x^2$ diameter tranſuerſa ellipſeos eſt $= 2a$, parameter $= \frac{2ac}{b}$, id quod vel inde patet, quod in ellipſi ſit $a^2 - x^2 : y^2$ ſicut $2a$ ad parametrum, vbi ſi pro parametro ponatur $\frac{2ac}{b}$, erit $a^2 - x^2 : y^2 = 2a : \frac{2ac}{b}$, et hinc $\frac{b}{c}y^2 = a^2 - x^2$, quae eſt aequatio propoſita.

In aequatione $\frac{3}{4}y^2 = x^2 - a^2$ diameter tranſuerſa hyperbolae eſt $= 2a$, parameter eiusdem $= \frac{8}{3}a$, id quod eodem modo oſtrndi poteſt.

In aequatione $\frac{(b-c)}{m}y^2 = 2ax + x^2$ diameter tranſuerſa hyperbolae eſt $= 2a$, parameter eiuſdem $= \frac{2am}{b-c}$.

In aequatione $\frac{b}{c}y^2 = a^2 - b^2 - x^2$ diameter tranſuerſa ellipſeos eſt $= 2\sqrt{(a^2 - b^2)}$, parameter eiusdem $= \frac{2c\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}$, et ſic porro.

Scholion. Tametſi ex iis, quae hactenus dicta ſunt, aequationes quaecunque ad ſectiones conicas pertinentes facile reduci poſſint ad ſuas ſpecies, tamen in tironum gratiam adferemus aequationes ſectionum conicarum maxime complicatas, quarum ope ſimpliciores ad ſua loca facile itidem reduci poſſint.

272. *Probl. Inuenire aequationem generalem pro parabola tam ad concauitatem, quam ad conuexitatem relata.*

Fig. 65. *Reſol.* 1) Sit parabola quaecunque AM, axis abſciſſarum poſitione datus HB, origo earundem in H, axis ordinatarum pa-

riter positione datus HC, notus erit hoc ipso angulus a coordinatis HQ et QM comprehensus. Detur praeterea positio diametri AD, notae erunt hoc ipso rectae AC et HC. Porro ex puncto H ducatur recta indefinita HE diametro AD parallela, sumaturque in eadem $HE=e$ pro arbitrio; et ducatur BE ad QM parallela; in triangulo HBE ob notos angulos $B=Q$, et $E=HIQ=APQ$, ac ob assumtum latus HE innotescet latus $HB=m$, et $BE=n$. Sit ergo abscissa $HQ=x$, ordinata $QM=y$, $HC=IP=r$, $AC=s$, erit in triangulis HBE et HIQ similibus $HB:HE=HQ:HI$, seu $m:e=x:HI=\frac{ex}{m}$, vnde $AP=CP-AC=\frac{ex}{m}-s$: erit item $HB:BE=HQ:QI$, seu $m:n=x:QI=\frac{nx}{m}$, adeoque $QP=QI+IP=\frac{nx}{m}+r$, et hinc $PM=QM-QP=y-\frac{nx}{m}-r$; atqui posita parametro $=p$, ex natura parabolae est $AP\times p=PM^2$, quare valores inuentos substituendo, ac simul omnes terminos ad vnicum membrum transponendo erit aequatio quaesita ad concauitatem

$$y^2-\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}x^2-2ry+\left.\begin{matrix}\frac{2nr}{m}\\ -\frac{ep}{m}\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}r^2=0\\ +sp\end{matrix}\right.$$

2) Sint axes coordinatarum positione dati HB et HN, duae quaeuis cordinatae QM et NM, fit $HE=e$ diametro AD parallela, ac ducatur EB vt supra. Ob datam rectarum AD, HN, HB positionem in triangulo HBE noti erunt anguli E, et B, ac latus assumtum HE, vnde innotescent latera $HB=m$, $BE=n$. Sit iam abscissa $HN=MQ=x$, ordinata $NM=HQ=y$, $HC=IP=r$, $AC=s$; in triangulis HBE et HQI similibus erit $HB:HE=HQ:HI$, seu $m:e=y:HI=\frac{ey}{m}$, et hinc $AP=CP-$ Fig. 66.

$AC = HI - AC = \frac{ey}{m} - s$, erit item $HB : HE = HQ : QI$, seu $m : n = y : QI = \frac{ny}{m}$, et hinc $QP = QI + IP = \frac{ny}{m} + r$, adeoque $PM = QM - QP = x - \frac{ny}{m} - r$; atqui ex natura parabolae $PM^2 = AP \times p$: quare valores inuentos substituendo, ac simul omnes terminos ad vnicum membrum transponendo erit aequatio quaesita ad conuexitatem.

$$x^2 - \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}y^2 - 2rx + \left.\begin{matrix}\frac{2nr}{m} \\ -\frac{ep}{m}\end{matrix}\right\}y + r^2 = 0 \\ + sp$$

273. *Coroll.* 1. Expensa vtraque aequatione perspicuum est. 1) Adesse in vtraque quadrata coordinatarum x^2 et y^2 cum eodem signo. 2) Vnum eorundem carere coefficiente, alterius autem coefficientem $\frac{n^2}{m^2}$ esse quadratum dimidii coefficientis $\frac{2n}{m}$ rectanguli coordinatarum xy. Ex his adeo characteribus dignosci poterunt aequationes ad parabolam.

274. *Coroll.* 2. Si recta BE vtrobique euanescente fiat $HB = HE$, seu $m = e$, et $n = o$, omissis terminis per n multiplicatis, et m pro e substituto, aequationes inuentae in has abibunt.

$$y^2 - 2ry - px + r^2 + sp = 0$$
$$x^2 - 2rx - py + r^2 + sp = 0$$

in quibus vnius tantum coordinatae occurrit quadratum, ac adest terminus eandem coordinatam continens ductam in quantitatem $2r$, et simul adest terminus r^2 continens quadratum eius cognitae cum signo +, quod habet quadratum coordinatae carens coefficiente: ac denique radix coefficientis quadrati huius cognitae r^2 nempe 1 semper est dimidium coefficientis termini $2ry$ vel $2rx$. Omnis itaque aequatio hisce praedita conditionibus est ad parabolam.

275. *Probl. Inuenire aequationem generalem pro circulo.*

Reſol. Sint axes coordinatarum HB et HC poſitione da- Fig. 67.
ti, detur item poſitione, et magnitudine diameter AD, ductaque recta HE diametro parallela ſumatur pro arbitrio $HE=e$, et ducatur EB ad HC parallela. In triangulo HBE innoteſcent, vt ſupra, latera $HB=m$, et $BE=n$. Sit iam abſciſſa $HQ=x$, ordinata $QM=y$, $HG=CF=t$, $FG=PI=HC=r$, radius $AF=h$, erit in triangulis HBE et HIQ ſimilibus $HB:HE=HQ:HI$, ſeu $m:e=x:HI=\frac{ex}{m}$, et hinc $PF=CF-CP=CF-HI=t-\frac{ex}{m}$, vel $Fp=HI-CF=\frac{ex}{m}-t$: erit item $HB:BE=HQ:QI$, ſeu $m:n=x:QI=\frac{nx}{m}$, adeoque $PM=QM-QI-IP=y-\frac{nx}{m}-r$: eſt vero ex natura circuli $PM^2=AF^2-FP^2$, vel $pm^2=FD^2-Fp^2$, ſeu $y^2-\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}x^2-2ry+\frac{2nr}{m}x+r^2=h^2-t^2+\frac{2et}{m}x-\frac{e^2}{m^2}x^2$: quare omnia tranſponendo obueniet aequatio quaeſita ad circulum

$$y^2-\frac{2n}{m}xy+\left.\begin{matrix}\frac{n^2}{m^2}\\+\frac{e^2}{m^2}\end{matrix}\right\}x^2-2ry+\left.\begin{matrix}\frac{2nr}{m}\\-\frac{2et}{m}\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}r^2\\-h^2\\+t^2\end{matrix}\right\}=0$$

276. *Coroll.* 1. Si fuerit BE ſeu $n=0$, erit $HB=HE$, ſeu $m=e$; quare omiſſis terminis per n multiplicatis, et pro e ſubſtituto m, inuenta aequatio abibit in hanc

$$y^2+x^2-2ry-2tx+r^2-h^2+t^2=0.$$

277. *Coroll.* 2. Expenſa vtraque aequatione perſpicuum eſt. 1) Quadrata coordinatarum in vtraque idem habere ſignum, et in priore quidem vnum eorum x^2 gaudere coefficiente $\frac{n^2}{m^2}+\frac{e^2}{m^2}$, ac adeſſe rectangulum coordinatarum xy. 2) Dimidium coefficien-

tis rectanguli coordinatarum $\frac{2n}{m}$ minus esse radice quadrata coefficientis quadrati x^2. 3) In vtraque haberi tria quadrata cognita r^2, h^2, t^2. Ex his adeo signis discerni poterunt aequationes ad circulum.

Scholion. In eruenda aequatione generali ad circulum supposuimus ordinatas ad diametrum perpendiculares, quae quidem aequatio memoratas paulo ante conditiones habet *per se*, seu ex sua natura: fieri autem potest, vt etiam aequatio ad ellipsim, cuius species est circulus, has easdem conditiones habeat *per accidens*, si nimirum compendii caussa mutetur expressio alicuius e postremis terminis, vti patebit ambas illas aequationes inter se conferenti. At omnis omnino aequatio secundae formulae (276) similis ad circulum est, cum in eadem deficiente rectangulo xy, quadrata coordinatarum careant coefficiente, id quod in ellipsi nunquam contingit.

Fig. 68. 278. *Probl. Inuenire aequationem generalem pro ellipsi.*

Resol. Sit parameter ellipseos $=p$, axis, vel diameter transuersa $AD=2h$, cetera vt in circulo, erit $HI=CP=\frac{ex}{m}$, et hinc $FP=CF-CP=t-\frac{ex}{m}$, vel $Fp=\frac{ex}{m}-t$, $QI=\frac{nx}{m}$, vnde $PM=y-\frac{nx}{m}-r$. Est autem ex natura ellipseos PM^2 ad $AP\times PD$, vel pm^2 ad $Ap\times pD$, vt quadratum axis vel diametri coniugatae ad quadratum axis vel diametri transuersae, seu cum parameter, axis vel diameter coniugata, axis vel diameter transuersa sint in continua proportione, loco rationis quadratorum axium vel diametrorum ponendo rationem parametri ad axem vel diametrum transuersam erit $PM^2 : AP\times PD$, vel $pm^2 : Ap\times pD = p : AD$; atqui recta AD bifariam secta est in puncto seu centro F, et non bifariam in puncto P vel p: ergo $AP\times PD = FD^2 - FP^2$,

FP^2, vel $Ap \times pD = FD^2 - Fp^2$. hinc $PM^2 : FD^2 - FP^2$, vel $pm^2 : FD^2 - Fp^2 = p : AD$, vnde $\frac{AD \times PM^2}{p} = FD^2 - FP^2$, vel $\frac{AD \times pm^2}{p} = FD^2 - Fp^2$, hoc eſt $\frac{2h}{p}y^2 - \frac{4hn}{mp}xy + \frac{2hn^2}{m^2p}x^2 - \frac{4hr}{p}y + \frac{4hnr}{mp}x + \frac{2hr^2}{p} = h^2 - \frac{e^2x^2}{m^2} + \frac{2et}{m}x - t^2$, ac omnia tranſponendo, per p multiplicando, per $2h$ diuidendo, obtinebitur aequatio deſiderata ad ellipſim

$$y^2 - \left.\begin{matrix}\frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2} \\ + \frac{e^2p}{2hm^2}\end{matrix}\right\} x^2 - \left.\begin{matrix}2ry + \frac{2nr}{m} \\ - \frac{2etp}{2hm}\end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix}+ r^2 = 0 \\ - \frac{h^2p}{2h} \\ + \frac{t^2p}{2h}\end{matrix}\right.$$

279. *Coroll.* 1. Si fuerit BE ſeu $n = 0$, erit HE = HB, ſeu $e = m$; quare omiſſis terminis per n multiplicatis, et m pro e ſubſtituto, aequatio inuenta in hanc abibit

$$y^2 + \frac{p}{2h}x^2 - 2ry - \frac{pt}{h}x + r^2 - \frac{h^2p}{2h} + \frac{t^2p}{2h} = 0.$$

280. *Coroll.* 2. Expenſa vtraque aequatione adparet 1) In vtraque adeſſe quadrata coordinatarum x^2 et y^2 cum eodem ſigno: et in priore quidem, vbi inſuper comparet rectangulum xy quadratum x^2 habere coefficientem $\frac{n^2}{m^2} + \frac{e^2p}{2hm^2}$ cuius radix quadrata maior eſt dimidio coefficiente rectanguli xy, vt ſupra in circulo. 2) In poſteriore quadratum x^2 habere coefficientem, quod nunquam euenit in circulo. 3) Terminos cognitos r^2, $\frac{h^2p}{2h}$, $\frac{t^2p}{2h}$ non eſſe omnes quadratos, vt in circulo. His ergo indiciis dignoſcuntur aequationes ad ellipſim.

281. *Coroll.* 3. Ellipſim in circulum degenerare, ſeu vtriuſque aequationem eandem eſſe nemo non videt, ſi axes,

vel diametri ellipſeos aequales fiant, ſeu ſi parameter p aequalis fiat axi, vel diametro tranſuerſae $2h$.

282. *Probl. Inuenire aequationem generalem pro hyperbola ad axem, vel diametrum tranſuerſam relata.*

Fig. 69. *Reſol.* Sint omnia, vt in ellipſi, erit $HI=\frac{ex}{m}$, adeoque $GI=FP=HI-GH=\frac{ex}{m}-t$, $QI=\frac{nx}{m}$, et hinc $PM=QM-QI-IP=y-\frac{nx}{m}-r$: eſt autem ex natura hyperbolae p: $AC=PM^2:FP^2-FA^2$, et hinc $\frac{AC\times PM^2}{p}=FP^2-FA^2$, ſeu $\frac{2h}{p}y^2-\frac{4hn}{mp}xy+\frac{2hn^2}{m^2p}x^2-\frac{4hr}{p}y+\frac{4hnr}{mp}x+\frac{2hr^2}{p}=\frac{e^2}{m^2}x^2-\frac{2et}{m}x+t^2-h^2$, ac omnia per p multiplicando, per $2h$ diuidendo, et tranſponendo obuenier aequatio quaeſita

$$y^2-\left.\begin{matrix}\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}\\-\frac{e^2p}{2hm^2}\end{matrix}\right\}x^2-\left.\begin{matrix}2ry+\frac{2nr}{m}\\+\frac{2ept}{2hm}\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+r^2=0.\\+\frac{h^2p}{2h}\\-\frac{t^2p}{2h}\end{matrix}\right.$$

283. *Coroll.* 1. Si fuerit BE ſeu $n=0$, erit $HB=HE$, ſet $m=e$; adeoque omiſſis terminis per n multiplicatis, et pro e ſubſtituto m, inuenta aequatio abibit in hanc

$$y^2-\frac{p}{2h}x^2-2ry+\frac{pt}{h}x+r^2+\frac{h^2p}{2h}-\frac{t^2p}{2h}=0.$$

284. *Coroll.* 2. E contemplatione vtriuſque aequationis elucet 1) In priore adeſſe quadrata coordinatarum cum iiſdem, vel contrariis ſignis, prout $\frac{n^2}{m^2}-\frac{e^2p}{2hm^2}$ eſt quantitas poſitiua, vel negatiua; at in ſecunda ſemper adeſſe cum ſignis contrariis. 2) Dimidium coefficientis rectanguli xy in prima maius eſſe radice quadrata coefficientis quadrati x^2, quo potiſſimum differunt aequa-

tiones ellipſis, et hyperbolae, dum in vtriſque adeſt xy, dum autem abeſt rectangulum ry, quadrata coordinatarum in hyperbola ſemper habent diuerſa ſigna, in ellipſi eadem.

285. *Coroll.* 3. Si parameter hyperbolae p aequetur axi vel diametro tranſuerſae, ſeu ſi axes vel diametri coniugatae inter ſe aequentur, hyperbola erit *aequilatera*, in qua ſuperiores duae aequationes in haſce degenerant

$$y^2 - \frac{2n}{m}xy + \left.\begin{matrix}\frac{n^2}{m^2}\\ -\frac{e^2}{m^2}\end{matrix}\right\}x^2 - 2ry + \left.\begin{matrix}\frac{2nr}{m}\\ +\frac{2et}{m}\end{matrix}\right\}x + r^2 = 0$$
$$+h^2 - t^2$$

$$y^2 - x^2 - 2ry + 2tx + r^2 + h^2 - t^2 = 0.$$

286. *Probl. Inuenire aequationem generalem pro hyperbola ad axem minorem, vel diametrum coniugatam relata.*

Reſol. Sit axis minor vel diameter coniugata $OR = 2h$, parameter eiuſdem $= p$, cetera vt ſupra, erit $HI = \frac{ex}{m}$, $QI = \frac{nx}{m}$, et hinc $TM = QM - QI - IT$, vel $tm = qm - qi - it = y - \frac{nx}{m} - r$, $GI = PM = \frac{ex}{m} - t$, vel $Gi = Pm = t - \frac{ex}{m}$: eſt autem ex natura hyperbolae $TM^2 : FR^2 + PM^2$, vel $tm^2 : FR^2 + pm^2$ ſicut quadratum axis vel diametri tranſuerſae ad quadratum axis vel diametri coniugatae, ſeu cum parameter, axis vel diameter tranſuerſa, axis vel diameter coniugata ſint in continua proportione, erit $TM^2 : FR^2 + PM^2$, vel $tm^2 : FR^2 + pm^2 = p : 2h$, vnde $\frac{2h \times TM^2}{p} = FR^2 + PM^2$, vel $\frac{2h \times tm^2}{p} = FR^2 + pm^2$, id eſt $\frac{2h}{p}\left(y^2 - \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}x^2 - 2ry + \frac{2nr}{m}x + r^2\right) = h^2 + \frac{e^2}{m^2}x^2 - \frac{2et}{m}x + t^2$: ergo multiplicando omnia per p, diuidendo per $2h$, ac tranſponendo erit

Fig. 70.

$$y^2 - \left.\begin{matrix} \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2} \\ -\frac{e^2p}{2hm^2} \end{matrix}\right\} x^2 - 2ry + \left.\begin{matrix} \frac{2nr}{m} \\ +\frac{2ept}{2hm} \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +r^2 = 0. \\ -\frac{k^2p}{2k} \\ -\frac{t^2p}{2b} \end{matrix}\right.$$

287. *Coroll.* 1. Si fuerit BE ſeu $n = 0$, erit HE = HB, ſeu $e = m$; quare omiſſis terminis per n multiplicatis, et pro e ſubſtituto m, aequatio inuenta abibit in hanc

$$y^2 - \frac{p}{2k}x^2 - 2ry + \frac{pt}{k}x + r^2 - \frac{k^2p}{2k} - \frac{t^2p}{2k} = 0.$$

288. *Coroll.* 2. Adparet conſideranti aequationem vtramque hoc vno differre a ſuperioribus, quod in his terminus $\frac{k^2p}{2k}$ negatiuus ſit, quod indicio erit in ſequentibus hyperbolam ad axem minorem, vel ad diametrum coniugatam referri.

289. *Coroll.* 3. Si in aequatione vtraque fiat $p = 2k$, habebuntur binae aequationes ad hyperbolam aequilateram.

Scholion. Quoniam aequationem hyperbolae intra aſymptotos in Elementis noſtris praetermiſimus, eandem hoc loco proponemus, priuſquam ad formulam eiuſdem generalem progrediamur.

290. *Probl. Inuenire aequationem ſimpliciſſimam pro hyperbola intra aſymptotos.*

Fig. 71. *Reſol.* Sit ordinata quaecunque PM, quae vtrinque producta occurrat aſymptotis in punctis R et r, ſitque ſemiaxis maior AC = a, ſemiaxis minor AE = b, CP = x, PM = y, PR = t, erit ex natura hyperbolae $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$: item in triangulis CAE et CPR ſimilibus PR : CP = AE : CA, ſeu $t : x = b : a$, et $t^2 : x^2 = b^2 : a^2$: ergo $y^2 : x^2 - a^2 = t^2 : x^2$, ſeu $x^2 : x^2 - a^2 = t^2 : y^2$, ac ſubtrahendo $x^2 : a^2 = t^2 : t^2 - y^2$, ſeu $x^2 : t^2 = a^2 : t^2 - y^2 = a^2 : b^2$, vnde $b^2 = t^2 - y^2$. Porro recta Rr ſecta eſt bifariam in puncto P, et non bifariam in puncto M, quare PR^2 = PM^2 + MR × Mr, ſeu $t^2 = y^2$ + MR × Mr, et hinc $t^2 - y^2 = b^2 =$ MR × Mr.

Ducantur iam rectae MQ et AB asymptoto Cr parallelae, similia erunt triangula MQR et AEB: si ergo sit MR=u, QM=z, CQ=TM=s, erit $u:z=b:AB=\frac{bz}{u}$; atqui supra fuit b^2=MR×Mr: ergo $b^2=u\times Mr$, et hinc $Mr=\frac{b^2}{u}$. Denique in triangulis TMr et ABE ob latera Mr et AE, Tr et AB, TM et BE parallela similibus est $AE:AB=Mr:TM$, seu $b:\frac{bz}{u}=\frac{b^2}{u}:s$: vnde $TM=CQ=s=\frac{b^2z}{u^2}=\frac{b\times AB}{u}$: ergo CQ×QM seu $sz=AB\times\frac{bz}{u}=AB^2$: id est rectangulum coordinatum est constans, seu=AB^2.

291. *Probl. Inuenire aequationem generalem pro hyperbola intra asymptotos.*

Resol. 1) Si linea abscissarum HB neutri asymptoto sit parallela, fiant omnia, vt in superioribus, et capiatur in asymptoto AD pars AT=HE=e, ducaturque ordinatae QM, seu asymptoto AR parallela TV, quae vocetur p, erit $HI=\frac{ex}{m}$, $QI=\frac{nx}{m}$, adeoque $CI=AP=HI-HC=\frac{ex}{m}-t$, et $PM=QM-QI-IP=y-\frac{nx}{m}-r$; est vero (290) AP×PM=AT×TV, seu $\frac{e}{m}xy-ty-\frac{en}{m^2}x^2+\frac{nt}{m}x-\frac{er}{m}x+tr=ep$: quare multiplicando omnia per m, diuidendo per e, ac transponendo erit

$$xy-\frac{n}{m}x^2-\frac{nt}{e}y+\frac{mt}{e}\left.\begin{matrix}x\\-r\end{matrix}\right\}+\frac{mtr}{e}\left.\begin{matrix}\\-mp\end{matrix}\right\}=0.$$

Fig. 72.

2) Si linea abscissarum HN vni asymptotorum AT parallela sit, ducta HE alteri asymptoto AR parallela fiant omnia, vt in superioribus, et capiatur AR=HE=e, sitque RV=p, QM=HN=x, HQ=NM=y, erit $HI=CP=\frac{ey}{m}$, et $QI=\frac{ny}{m}$, vnde

Fig. 73.

$AP = CP - AC = \frac{ey}{m} - t$, et $PM = QM - QI - IP = x - \frac{ny}{m} - r$; eſt vero (290) $AP \times PM = AR \times RV$, ſeu $\frac{e}{m}xy - tx - \frac{en}{m^2}y^2 + \frac{nt}{m}y - \frac{er}{m}y + tr = ep$: ergo multiplicando omnia per m, diuidendo per e, ac tranſponendo erit

$$xy - \frac{n}{m}y^2 - \frac{mt}{e}x + \left.\begin{matrix} \frac{nt}{e} \\ -r \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} \frac{mtr}{e} \\ -mp \end{matrix}\right\} = 0.$$

292. *Coroll.* Expenſa vtraque aequatione patet 1) ſemper adeſſe rectangulum coordinatarum xy, cum nullum habeat coefficientem, quo euaneſcente euaneſcat. 2) Vnicum tantum adeſſe e quadratis coordinatarum, quod ipſum euaneſcit, ſi fiat $n = 0$. Ex his adeo indiciis diſcerni poſſunt aequationes ad hyperbolam intra aſymptotos.

293. Vt aequationes quaſuis ſpeciales ad haſce generales facilius reducere norint tirones, adnotabimus in tabella ſequente compendiaria earundem diſcrimina, quae pendent potiſſimum a rectangulo illo coordinatarum xy, ab eiuſdem coefficiente, et a quadratis coordinatarum x^2 ac y^2, quemadmodum vidimus. Columna prima exhibet rectangulum xy, ſecunda coordinatarum quadrata y^2 et x^2; quorum ſi aliquod deſit, eius locum occupat o.

	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ y^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{matrix}$	Hyperbola intra aſymptotos
	$\pm y^2 \pm x^2$	Hyperbola circa diametrum
xy	$+y^2+x^2$	Parab. ſi $\frac{1}{2}$ coeff. $xy = \sqrt{}$ coeff. x^2
	$+y^2+x^2$	Ellips. ſi $\frac{1}{2}$ coeff. $xy < \sqrt{}$ coeff. x^2
	$+y^2+x^2$	Hyperb. ſi $\frac{1}{2}$ coeff. $xy > \sqrt{}$ coeff. x^2
	$\begin{matrix} y^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{matrix}$	Parabola
0	$+y^2+x^2$	Ellips. ſi x^2 habet coefficientem
	$+y^2+x^2$	Circul. ſi x^2 caret coefficiente
	$\pm y^2 \pm x^2$	Hyperbola circa diametrum

CAPVT II.

De variis Problematis ad illuſtrandam locorum geometricorum naturam pertinentibus.

294. *Probl. Conſtruere duo quadrata, quorum ſumma aequetur quadrato dato.*

Reſol. Latere dati quadrati AB tanquam diametro deſcribatur circulus, erit eiuſdem peripheria locus problematis propoſiti. Vbicunque enim in ea ſumatur punctum C, ſemper erit $AC^2+BC^2=AB^2$. Fig. 74.

295. *Coroll.* Si quaeſitorum quadratorum differentia debeat aequari quadrato dato, dati quadrati lateri AB ſub angulo recto iungenda eſt recta indefinita BD, quae erit locus problematis propoſiti. Vbicunque enim in ea ſumatur punctum C, ducta illuc hypotenuſa AC ſemper erit $AC^2-BC^2=AB^2$. Fig. 75.

Fig. 76. 296. *Probl. Super data recta* AB *describere triangulum dato* MNL *aequale.*

Resol. Ad datam rectam AB, ad basim trianguli ML, et ad eiusdem altitudinem TN quaeratur quarta proportionalis AH, eaque in puncto A erigatur ad rectam AB perpendiculariter, ac per eiusdem extremum H ducatur rectae AB parallela indefinita HR, erit ea locus problematis propositi. Vbicunque enim in ea sumatur punctum C, ductis illuc rectis AC et BC erit triangulum ABC = MNL.

Fig. 77. 297. *Probl. Super data recta* AB *construere triangulum, in quo summa angulorum ad basim aequetur angulo dato.*

Resol. Fiat angulus BAC aequalis summae datae, ac ad rectam AC erigatur in A perpendicularis AD indefinita, cui occurret alicubi in D recta LD datam AB bifariam et perpendiculariter secans in puncto I; iam radio DA describatur circulus, qui ob DA = DB transibit per punctum B, eritque arcus AHB locus problematis propositi. Vbicunque enim in eodem sumatur punctum H, et ducantur chordae AH et BH, semper erit angulus ABH = HAC, adeoque angulus ABH + HAB = BAC.

298. *Coroll.* Eodem res redit, si super data basi AB construendum sit triangulum, in quo angulus ad verticem H aequetur angulo dato. Fiat enim angulus BAG aequalis dato, cetera vt supra, erit idem arcus AHB locus problematis, cum angulus AHB semper eandem sit mensuram habiturus, quam angulus datus BAG, nempe dimidium arcus ALB.

Fig. 78. 299. *Probl. Super data recta* AB *construere triangulum, in quo differentia angulorum ad basim aequetur angulo dato.*

Resol. Fiat angulus ABC aequalis dato, et bisecta recta AB in puncto I ducatur FG = AB, et parallela ad BC; deinde diametris AB et FG ad tangentem BC describatur arcus indefinitus

tus hyperbolae aequilaterae BR, erit is locus problematis propoſiti, in quo vbicunque ſumatur punctum D, ductis rectis AD et BD erit ABD triangulum deſideratum. Ducta enim ordinata DM tangenti BC parallela, erit ex natura hyperbolae aequilaterae $DM^2 = BM \times AM$, adeoque $AM : DM = DM : BM$, et hinc ſimilia erunt triangula AMD et BMD, vnde angulus $MAD = BDM = CBD$: ergo $ABD - CBD = ABD - BAD = ABC$.

300. *Probl. Si datae longitudinis recta* BC *datum angulum* A *ſubtendens ita moueatur, vt eius extrema* B *et* C *perpetuo radant latera anguli* A, *nempe rectas* AB *et* AC, *inuenire locum puncti cuiuſuis* M *in recta mobili* BC. Fig. 79.

Reſol. E puncto M ducatur recta ME ad AB parallela, et MD ad AC perpendicularis, ſitque $AE = x$, $EM = y$, $BM = a$, $CM = b$, erit ob parallelas $BM : AE = MC : EC$, ſeu $a : x = b : EC = \frac{bx}{a}$. Porro ob datum angulum $BAC = MED$ datur ratio laterum trianguli rectanguli MED: ſit ergo $ME : ED = a : m$, erit $ED = \frac{my}{a}$, et hinc $DC = EC - ED = \frac{bx - my}{a}$. Ad haec $ME^2 - ED^2 = MD^2$, ſeu $y^2 - \frac{m^2y^2}{a^2} = MD^2$, item $MC^2 - MD^2 = DC^2$, ſeu $b^2 - y^2 + \frac{m^2y^2}{a^2} = DC^2 = \frac{(bx - my)^2}{a^2}$, id eſt $b^2 - y^2 + \frac{m^2y^2}{a^2} = \frac{b^2x^2 - 2bmxy + m^2x^2}{a^2}$, et hinc $y^2 - \frac{2bmxy}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 = 0$, vbi vtrumque quadratum coordinatarum eſt poſitiuum, et dimidius coefficiens rectanguli xy, nempe $\frac{bm}{a^2}$ minor eſt quam $\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$, ſeu quam $\frac{b}{a}$: cum enim ſit $EM : ED = a : m$, et $a : b = BM : MC = AE : EC$, ſitque $EM > ED$, et $ED < EC$, ratio $a : m$ maior eſt quam ratio $a : b$, ſeu $\frac{m}{a} < \frac{b}{a}$, vnde etiam $\frac{bm}{a^2} < \frac{b}{a}$: quare locus puncti M eſt ellipſis (293).

301. *Coroll.* 1. Dum angulus datus A rectus est, recta ME congruit cum MD, et hinc ED est $=0$, et $MC^2-DC^2=MC^2-EC^2=DM^2=EM^2$, seu $b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=y^2$, seu $y^2+\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}=0$: id est, $BM=a$ est semiaxis transuersus ellipseos, et $MC=b$ eiusdem semiaxis coniugatus (268).

302. *Coroll.* 2. Si ergo in eodem casu fit $BM=MC$, locus puncti M erit circulus, in quem tunc ellipsis degenerat.

Fig. 80. 303. *Probl. Si normae* ACD *crus vnum* AC *semper subtendat angulum rectum* B, *et angulus eiusdem* C *excurrat per cathetum* BH *inuenire locum* CDN, *in quo punctum* D *versatur.*

Resol. Demisso perpendiculo DH sit $BH=x$, $HD=y$, $AC=a$, $CD=b$, erit $CH^2=CD^2-DH^2=b^2-y^2$, vnde $CH=\sqrt{(b^2-y^2)}$, et $BC=BH-CH=x-\sqrt{(b^2-y^2)}$. Porro in triangulis ABC et DCH similibus est $CD:DH=AC:BC$, seu $b:y=a:x-\sqrt{(b^2-y^2)}$, vnde $bx-b\sqrt{(b^2-y^2)}=ay$, et $bx-ay=b\sqrt{(b^2-y^2)}$, et eleuando vtrinque ad quadratum $b^2x^2-2abxy+a^2y^2=b^4-b^2y^2$, adeoque $y^2-\frac{2abxy+b^2x^2-b^4}{a^2+b^2}=0$, vbi $\frac{ab}{a^2+b^2}$ semper minor est quam $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, adeoque locus quaesitus est ellipsis (293).

Fig. 81. 304. *Probl. Datis positione rectis* AB *et* AC, *quae a tertia quapiam* PB *circa punctum* P *fixum gyrante secentur in punctis* C *et* B, *ac portio intercepta* CB *in puncto* M *diuidatur in ratione data, inuenire locum puncti* M.

Resol. Ducta recta AP, eidemque parallelis MO et BF, sit $AP=a$, $AO=x$, $OM=y$: cum detur ratio $CM:MB$, datur quoque ratio $CM:CB=OM:FB$, quae fit $=m:n$, vnde $y:FB=m:n$, et hinc $FB=\frac{ny}{m}$. Item ob datum angulum BAF

datur etiam ratio laterum FB: FA, quae sit $=n:p$, vnde $\frac{ny}{m}$: AF $=n:p$, adeoque AF $=\frac{py}{m}$. Denique ob triangula COM et CFB similia est FB: CF = MO: CO = AP: AC: ergo FB + AP: CF + AC = MO + AP: CO + AC, seu $\frac{ny}{m}+a:\frac{py}{m}=y+a:x$, vnde $nxy+max=py^2+pay$, vbi cum adsit rectangulum coordinatarum xy cum vnius tantum coordinatae quadrato, locus quaesitus puncti M est hyperbola intra asymptotos (293).

305. *Probl. Si circa eundem axem* AB *diuersis parametris describantur complures parabolae, ac e puncto quolibet axis* B *ducantur ad easdem normales* BC, BE, BG, BI *etc. inuenire locum punctorum* C, E, G, I *etc.* Fig. 82.

Resol. In axe communi sumatur portio BO aequalis semiparametro parabolae per punctum I transeuntis, BN aequalis semiparametro parabolae per G transeuntis, BM aequalis semiparametro parabolae per E transeuntis, et sic porro, ducanturque rectae ordinatae OI, NG, ME etc. determinabunt hae ordinatae puncta illa I, G, E etc. in quibus normales occurrunt parabolis, cum rectae BO, BN, BM etc. aequales semiparametris sint futurae subnormales. Iam in quauis parabola quadratum ordinatae aequatur facto ex parametro in abscissam, seu $OI^2 = AO \times 2OB$, $NG^2 = AN \times 2BN$, $ME^2 = AM \times 2BM$ etc. ergo quadrata ordinatarum sunt vt $AO \times 2OB$, vt $AN \times 2BN$, vt $AM \times 2BM$, seu per 2 diuidendo sunt vt rectangula abscissarum: quare locus quaesitus est ellipsis circa axem AB descripta.

306. *Probl. Si ordinata circuli* PM *producatur in* Q, *donec* PQ *fiat aequalis chordae correspondenti* AM, *inuenire locum omnium punctorum* Q *eodem modo determinatorum.* Fig. 83.

Reſol. Sit diameter circuli $AB=p$, abſciſſa quaecunque $AP=x$, ordinata $PQ=AM=y$, erit $PB=p-x$, $PM^2=px-x^2$, et hinc $AM^2=y^2=AP^2+PM^2=px$. Eſt adeo locus quaeſitus parabola, et ſimul patet methodus expedita deſcribendi parabolam data parametro p.

307. *Coroll.* 1. Si curua genitrix AMB parabola fuerit, erit $PM^2=px$, et hinc $PQ^2=AM^2=PM^2+AP^2=px+x^2$. Erit ergo locus quaeſitus hyperbola aequilatera, cuius axis eſt p (268).

308. *Coroll.* 2. Sin autem curua genitrix AMB fuerit hyperbola aequilatera, erit $PM^2=px+x^2$, adeoque $PQ^2=AM^2=y^2=PM^2+AP^2=px+2x^2$: erit ergo locus quaeſitus hyperbola, cuius parameter eſt $=p$, axis tranſuerſus $=\frac{1}{2}p$ (268).

Fig. 84. 309. *Probl. Si ad chordam parabolae* AM *erigatur in puncto* A *perpendiculum* AN *occurrens ordinatae* MP *productae alicubi in* N, *inuenire locum omnium punctorum* N *eodem modo determinatorum.*

Reſol. Cum triangulum NAP in P rectangulum ſit, vti etiam triangulum NAM in A ex conſtructione, erit $PM:AP=AP:PN$, ſeu $PM^2:AP^2=AP^2:PN^2$; quare ſi parameter parabolae ſit $=p$, $AP=x$, $PN=y$, erit $PM^2:x^2=x^2:y^2$, vnde $PM^2=\frac{x^4}{y^2}$; ſed etiam ex natura parabolae $PM^2=px$: ergo $px=\frac{x^4}{y^2}$, ſeu $y^2=\frac{x^3}{p}$, et $py^2=x^3$. eſt adeo locus omnium punctorum N parabola cubica, ad conuexitatem relata, cuius parameter eſt $=p$.

Fig. 85. 210. *Probl. Si diameter dati circuli* AB *ſibi ipſi in* A *ad angulum rectum adplicetur, ſeu ſit* $AB=AD$; *deinde recta* AD *rotetur circa punctum* A *ita, ut vnum eius extremum percurrat peripheriam circuli* AGBF, *inuenire locum* DMANC *ab altero eiuſdem extremo* D *interea percurrendum.*

Reſol. Ponamus rectam AD peruenisse ad ſitum quemcunque GM, e punctis G et M demiſſis perpendiculis GP et MQ ſit $AB=2a$, $AP=x$, $QM=y$, erit $AG=\sqrt{(AB\times AP)}=\sqrt{2ax}$, ac $AM=GM-AG=AB-AG=2a-\sqrt{2ax}$. Porro ob triangula rectangula APG et AQM ſimilia erit $AG:AP=AM:QM$, ſeu $\sqrt{2ax}:x=2a-\sqrt{2ax}:y$, vnde $y=\frac{2ax-x\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax}}=\frac{\sqrt{4a^2x^2-x\sqrt{2ax}}}{\sqrt{2ax}}=\sqrt{2ax}-x$, et hinc $y+x=\sqrt{2ax}$, et vtrinque eleuando ad quadratum $y^2+2xy+x^2=2ax$, vnde $y^2+2xy+x^2-2ax+0$. Eſt ergo locus quaeſitus parabola (293).

311. *Probl. Sint in diametris eiuſdem parabolae* MN, OP, QR *etc. puncta* A, B, C *etc. in quibus adplicatae ordinatae aequentur ſuis abſciſſis, inuenire locum horum punctorum.*

Reſol. Sit parameter cuiuſuis diametri $=p$, abſciſſa in eadem diametro ſumta $=x$, ordinata correſpondens $=y$, erit $px=y^2$; ſed ex hypotheſi $x=y$: ergo $px=x^2$, et $p=x$, adeoque abſciſſae MA, OP, QC etc. aequantur earum diametrorum parametris. Ducantur iam rectae OD, QE, BG, CH axi MN perpendiculares, ſitque parameter axis $MN=p=MA$, $MD=t$, $BG=OD=y$, $AG=x$, erit $DA=MA-MD=p-t$, $AO^2=DO^2+DA^2=y^2+p^2-2pt+t^2$; atqui ex natura parabolae $y^2=pt$, et $t^2=\frac{y^4}{p^2}$: ergo $AO^2=y^2+p^2-2y^2+\frac{y^4}{p^2}=p^2-y^2+\frac{y^4}{p^2}$, et AD^2 ſeu $p^2-2pt+t^2=p^2-2y^2+\frac{y^4}{p^2}=\frac{p^4-2p^2y^2+y^4}{p^2}$, et hinc $AD=\frac{\pm p^2\mp y^2}{p}$, adeoque $OB=DG$, ſeu parameter diametri OP eſt $=AG+AD=x\frac{\pm p^2\mp y^2}{p}$; atqui eadem parameter OB eſt quadrupla abſciſſae axis MD plus parametro eiuſdem p, ſeu eſt $=4MD+p=4t+p$, et pro t ponendo $\frac{y^2}{p}$ erit $OB=p+\frac{4y^2}{p}$: quare $x\frac{\pm p^2\mp y^2}{p}=p+\frac{4y^2}{p}$, ſeu $px\mp p^2\mp y^2=p^2+4y^2$. Fig. 86.

Porro in expreſſione $\mp p^2 + y^2$ ſigna ſuperiora ſumenda ſunt, ſi ordinata OD cadat ſupra punctum A: ſi vero cadat infra, et ſit e. g. ST, ſumenda quidem erunt ſigna inferiora, ſed tunc erit $AT = MT - MA = t - p = \frac{y^2}{p} - p = \frac{y^2 - p^2}{p}$, qui valor tolli debet ab AV, ſeu ab x, vt habeatur $SX = OB$: quare vtroque in caſu erit $px + p^2 - y^2 = p^2 + 4y$, ſeu $y^2 = \frac{1}{5}px$. Eſt ergo locus quaeſitus parabola, cuius axis parameter eſt quinta pars parametri axis parabolae propoſitae.

Fig. 87. 312. *Probl. Data baſi trianguli* BC, *dataque differentia angulorum* B *et* C *inuenire locum verticis* A.

Reſol. Verticis locum eſſe hyperbolam aequilateram iam vna conſtructione oſtendimus (298): nunc alia conſtructione referendo hyperbolam ad aſymptotos idem oſtendemus. Biſecta baſi BC in puncto F ducatur per illud recta indefinita ED hac lege, vt anguli verticales ad F aequentur datae ſemidifferentiae angulorum B et C; conſtabit angulus ADE angulo minore ad baſim ACB addita ſemidifferentia DFC; et angulus AED conſtabit angulo maiore ad baſim ABC demta ſemidifferentia EFB: ergo in triangulo AED anguli ad E et D aequales erunt. Ducantur iam ad rectam ED perpendicula AO, BM, CG, erit EO = OD, EM = DG, BM = CG, et MF = FG, quare EO — MF = OD — FG, ſeu EM + MO — MO — OF = OF + FD — FD + DG, et hinc EM — OF = OF — DG, ſeu 2OF = EM + DG = 2EM, adeoque OF = EM, et hinc EO = FM. Porro ſit FO = x, AO = y, FM = a, MB = b, erit ob triangula EBM et EAO ſimilia BM: AO = EM: EO, ſeu $b : y = x : a$, vnde $xy = ab$. Eſt ergo locus quaeſitus hyperbola intra aſymptotos (293).

313. *Probl. Super data baſi* AP *conſtructis quotcunque tri-* Fig. 88.
angulis, quorum latera AM *et* PM *ſint in ratione data, inuenire locum verticum eorundem* M.

Reſol. Sint latera AM: PM = $m:n$, ac diuidatur baſis AP in eadem illa ratione, vt nempe ſit AD: DP = $m:n$, demiſſoque perpendiculo MG, ſit MG = y, DG = x, erit GP = DP — DG = $n-x$ vel = $x-n$, prout punctum G cadit citra, vel vltra P: et quia $m:n$ = AM: PM, erit PM = $\frac{n \times AM}{m}$; atqui AM = $\sqrt{(AG^2+GM^2)} = \sqrt{(m^2+2mx+x^2+y^2)}$: ergo PM = $\frac{n\sqrt{(m^2+2mx+x^2+y^2)}}{m}$: eſt vero idem PM = $\sqrt{(GP^2+GM^2)} = \sqrt{(n^2-2nx+x^2+y^2)}$, ergo $\frac{n\sqrt{(m^2+2mx+x^2+y^2)}}{m} = \sqrt{(n^2-2nx+x^2+y^2)}$, ac eleuando ad quadratum, et fractionem tollendo erit $n^2m^2+2n^2mx+n^2x^2+n^2y^2 = n^2m^2-2mnx+mx^2+my^2$, et hinc $n^2+\frac{2n^2x}{m}+\frac{n^2x^2}{m^2}+\frac{n^2y^2}{m^2} = n^2-2nx+x^2+y^2$, ſeu $y^2-\frac{n^2}{m^2}y^2+x^2-\frac{n^2}{m^2}x^2-2nx-\frac{2n^2}{m}x = 0$, id eſt $\frac{(m^2-n^2)}{m^2}y^2+\frac{(m^2-n^2)}{m^2}x^2-\frac{(2mn-2n^2)}{m}x = 0$, et omnia per $\frac{m^2-n^2}{m^2}$ diuidendo $y^2+x^2-\frac{2mnx}{m-n} = 0$, vbi cum deſit rectangulum xy, et quadrata coordinatarum idem ſignum habeant, et coefficiente careant, locus quaeſitus eſt circulus (293), cuius radius eſt = $\frac{mn}{m-n}$ (268).

314. *Probl. Inuenire locum omnium punctorum* M *intra cir-* Fig. 89.
culum poſitorum, quae a dato intra eundem circulum puncto A, *et a peripheria aequaliter diſtant.*

Reſol. Per datum punctum A ducatur radius CN, ac recta CA ſecetur bifariam in puncto R; deinde ex A ducatur ad peripheriam recta quaecunque AP, ſeceturque bifariam in D, et

ex D erigatur perpendiculum DM occurrens radio CP in M, et ducatur AM, erit AM=MP, adeoque punctum M erit in loco quaesito, et AM+CM=CP. Demittatur ex M perpendiculum MQ, sitque MQ=y, RQ=x, AR=CR=a, erit AQ=$a-x$, CQ=$a+x$, AM=$\sqrt{(QM^2+AQ^2)}=\sqrt{(y^2+a^2-2ax+x^2)}$. Sit item CP=$r$, erit AM=PM=CP−CM, et CM=$\sqrt{(CQ^2+MQ^2)}=\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}$, vnde AM=$r-\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}$: igitur conferendo duos valores inuentos eiusdem AM erit $\sqrt{(y^2+a^2-2ax+x^2)}=r-\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}$, seu eleuando ad quadratum $y^2+a^2-2ax+x^2=r^2-2r\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}+a^2+2ax+x^2+y^2$, vnde $-4ax-r^2=-2r\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}$, ac rursus eleuando ad quadratum $16a^2x^2+8ar^2x+r^4=4r^2(a^2+2ax+x^2+y^2)$, seu $\frac{4a^2x^2}{r^2}+2ax+\frac{1}{4}r^2=a^2+2ax+x^2+y^2$, id est $y^2+\frac{(r^2-4a^2)}{r^2}x^2+a^2-\frac{1}{4}r^2=0$, vbi cum desit rectangulum xy, et ob $r>2a$ quadrata coordinatarum idem signum habeant, locus quaesitus ellipsis est (293).

Fig. 90. 315. *Coroll.* 1. Si punctum datum A sit extra circulum, eodem plane modo obtinetur AM=$\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}$: et quia AM=MP, erit idem AM=CM−CP=$\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}-r$, vnde deuenietur ad eandem prorsus aequationem $y^2+\frac{(r^2-4a^2)}{r^2}x^2+a^2-\frac{1}{4}r^2=0$; sed ob $r<2a$ quadrata coordinatarum diuersa habebunt signa, et hinc locus quaesitus erit hyperbola (293), cuius axis maior =r (268).

Fig. 91. 316. *Coroll.* 2. Si in Fig. 89. centrum circuli C recedat versus H infinite, arcus circuli NP abibit in rectam NP, ac radii PC et NC euadent paralleli: quare ellipsis degenerabit in parabolam; cuius directrix erit NP, semiparameter NA, vertex F in medio rectae NA. Sit enim NF=FA=a, FQ=x, QM=y,

erit

erit $AM = MP = \sqrt{(AQ^2 + QM^2)} = \sqrt{(y^2 + (a-x)^2)} = \sqrt{(y^2 + a^2 - 2ax + x^2)}$; est vero idem $MP = NQ = NF + FQ = a + x$: ergo $\sqrt{(y^2 + a^2 - 2ax + x^2)} = a + x$, et $y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = a^2 + 2ax + x^2$, vnde $y^2 = 4ax$, quae aequatio est ad parabolam, cuius parameter $= 4a$ (268).

317. *Coroll.* 2. Similiter si in Fig. 90. centrum C recedat infinite, sed ad plagam oppositam, nempe sinistram versus, arcus circuli NP abibit in rectam NP Figurae 91, et hyperbola MG degenerabit itidem in parabolam, cuius semiparameter erit, vt ante, recta NA, et hyperbola opposita recedat infinite ob axem transuersum r infinitum. Quare parabola tum ad ellipses, tum ad hyperbolas referri potest, prout scilicet centrum circuli infinite recedit dextram, vel sinistram versus,

318. *Probl. Si datis duobus circulis concentricis in maiore* Fig. 92. *ducatur radius* CD, *et perpendiculum* DQ, *in quod e puncto* P, *vbi radius* CD *occurrit minoris circuli peripheriae, demittatur perpendicularis* PM, *inuenire locum omnium punctorum* M *eodem modo determinatorum.*

Resol. Si radius $AC = a$, $PC = b$, $AQ = x$, $QM = y$, erit $QB = 2a - x$, $QB = \sqrt{(AQ \times QB)} = \sqrt{(2ax - x^2)}$. Porro in triangulis DCQ et DPM similibus est DC: DP = DQ: DM, seu $a : a - b = \sqrt{(2ax - x^2)} : DM$, quare $DM = \frac{(a-b)\sqrt{(2ax-x^2)}}{a}$, et hinc $QM = y = QD - DM = \sqrt{(2ax - x^2)} - \frac{(a-b)\sqrt{(2ax-x^2)}}{a}$ $= \sqrt{(2ax - x^2)} - \frac{a\sqrt{(2ax-x^2)}}{a} + \frac{b\sqrt{(2ax-x^2)}}{a}$, seu $y = \frac{b\sqrt{(2ax-x^2)}}{a}$, adeoque $y^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = 0$: est adeo locus quaesitus ellipsis, cuius axis maior $= 2a$, axis minor $= 2b$ (268).

319. *Coroll.* Si radius Cd ſumatur in minore circulo, et Cp in maiore, ac ex p demittatur perpendiculum pm, punctum m erit in eadem ellipſi, ſed ordinatis qm ad axem minorem relatis. Erit enim in triangulis Cdq et pmd ſimilibus $Cd : dq = dp : dm$, ſeu $b : \sqrt{(2bx - x^2)} = a - b : dm$, vnde $dm = \frac{(a-b)\sqrt{(2bx-x^2)}}{b}$, adeoque $qm = qd + dm = y = \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(a-b)\sqrt{(2bx-x^2)}}{b} = \frac{a\sqrt{(2bx-x^2)}}{b}$, hinc $y^2 - \frac{2a^2x}{b} + \frac{a^2x^2}{b^2} = 0$.

Fig. 93.

320. *Probl. Si in eiuſdem diametri tubis communicantibus, ac verticalibus* ACDB *fluidum homogeneum conſiſtat ad libellam* EH, *tum incipiat turbato aequilibrio oſcillare, inuenire locum centri communis grauitatis* I *fluidi in vtroque tubo contenti durante ea oſcillatione.*

Reſol. Si cylindri fluidi ECQF et HDSG bifariam diuidantur, ita vt puncta M et P ſint centra magnitudinis, erunt eadem etiam centra grauitatis eorundem, quae ſi connectantur recta MP, punctum rectae huius medium I erit centrum commune grauitatis, cuius proinde locus quaeritur. Ponamus iam inchoata fluidi oſcillatione centra M et P deuenire ad N et O, ducaturque recta NO, ac diuidatur in puncto R ita, vt partes NR et RO reciproce reſpondeant maſſis fluidi in tubis eo momento contenti, abibit centrum grauitatis I ad punctum R: ſunt autem maſſae fluidi ob aequales baſes vt altitudines, ſeu vt earum dimidia OS et NQ: erit ergo NQ : OS = RO : RN.

Sit iam $EQ = HS = 2a$, $IM = IP = b$, erit $MQ = PS = a$; demittatur ad rectam MP perpendiculum RK, cui ex I ducatur parallela indefinita IT, et in hanc perpendiculum RL, ſitque $IK = LR = x$, $KR = LI = y$, erit $IR = \sqrt{(IK^2 + KR^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Ad haec ob triangula IKR et IPO ſimilia $IK : KR = IP : PO$, ſeu $x : y = b : PO = \frac{by}{x}$, et hinc $OS = PS + PO = a +$

$\frac{by}{x} = \frac{lax+by}{x}$. Item ob triangula IPO et IMN similia erit IP : IM = PO : MN, adeoque ob IP = IM erit etiam MN = PO = $\frac{by}{x}$, ac proinde MQ — MN = NQ = $a - \frac{by}{x} = \frac{ax-by}{x}$. Denique IK : IR = IP : IO, sea $x : \sqrt{(x^2+y^2)} = b : IO = \frac{b\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}$, adeoque RO = IO — IR = $\frac{b\sqrt{(x^2+y^2)}}{x} - \sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{b\sqrt{(x^2+y^2)} - x\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}$, et RN = IR + IN = IR + IO = $\frac{b\sqrt{(x^2+y^2)} + x\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}$: si ergo in proportione NQ : OS = RO : RN valores hactenus inuenti substituantur, erit $ax - by : ax + by = (b-x)\sqrt{(x^2+y^2)} : (b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} = b - x : b + x$; vnde $x^2 = \frac{b^2}{a}y$. Est adeo locus quaesitus parabola ad conuexitatem relata, cuius parametr est $\frac{b^2}{a}$, axis IT, vertex I, ac rami vtrinque aequales intra tubos protensi (268).

321. *Coroll.* Si tubi communicantes diametros habeant inaequales, eodem modo ostenditur locum centri I esse parabolam: sed tunc centrum I vicinius erit tubo crassiori, et parabola ex ea parte ramum habebit breuiorem.

322. *Probl. Si globus ex eodem loco* A *eadem vi, sed diuersis directionibus explodatur, inuenire locum verticum* B, C, D, E *etc. omnium parabolarum ab eodem describendarum.* Fig. 94.

Resol. Sit celeritas globi explosi tanta, quanta lapsu libero per KA acquireretur, et sit recta KL directrix parabolae ABF, ac focus eiusdem in O, item sit KA = LM = a, AM = PB = x, AP = BM = y, erit KP = LB = $a - y$. Quia vero parameter axis BM est quadrupla distantiae verticis a foco aut directrice, erit ea = 4LB = $4a - 4y$, qua ducta in abscissam BM erit BM ×

$(4a-4y)=PB^2=AM^2$, seu $4ay-4y^2=x^2$, quam facile adparet esse aequationem ad ellipsim relatam ad axem minorem $=a$, cuius axis maior sit $=2a$: est enim in ellipsi quadratum ordinatae ad axem minorem ad factum suarum abscissarum, vt quadratum axis maioris ad quadratum axis minoris: ponamus ergo axem maiorem esse $=2a$, minorem $=a$, erit $x^2 : ay-y^2 = 4a^2 : a^2$, vnde $x^2=4ay-4y^2$, vt supra. Idem patebit dando eidem aequationi hanc formam $\frac{\frac{1}{4}a^2}{a^2}x^2=ay-y^2$ (268).

Fig. 95. 323. *Probl. Si corpus aliquod graue per diuersa eiusdem altitudinis plana inclinata* AC, AD, AE *etc. successiue demittatur, inuenire locum punctorum* M, N, O *etc. in quibus erit elapso eo tempore, quo per altitudinem communem planorum* AB *libere delaberetur.*

Resol. Sit communis planorum altitudo $AB=2a$, ad quam e quouis punctorum illorum N demittatur perpendiculum NQ, et sit $AQ=x$, $NQ=y$, erit $AN=\sqrt{(x^2+y^2)}$. Sit porro vis per planum $AN=V$, vis per $AQ=v$, vis per $AB=U$, erit $V:v=AQ:AN=x:\sqrt{(x^2+y^2)}$, et hinc $V=\frac{vx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Ad haec cum spatia AN et AB ex hypothesi intra idem tempus percurrantur, vires sunt vt celeritates, seu vt radices altitudinum, adeoque $V:U=\sqrt{x}:\sqrt{2a}$, vnde $V=\frac{U\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$: ergo $\frac{vx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{U\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$, seu diuidendo per v et U, quae vires sunt aequales, cum vis in lapsu libero sit constans, erit $\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$, seu $\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{x}{2a}$, et hinc $x^3+xy^2=2ax^2$, seu $y^2=2ax-x^2$, quae est aequatio ad circulum, cuius diameter $=2a$ (268): locus ergo punctorum M, N, O etc. est peripheria circuli.

324. *Coroll.* Si e puncto B ad plana data demittantur perpendicula BM, BN, BO etc. constat ex mechanica puncta M,

N, O etc. fore illa ipſa, ad quae peruenit corpus intra tempus, quo per AB delaberetur: quare puncta illa ſunt vertices angulorum rectorum eidem hypotenuſae AB inſiſtentium, quorum verticum locum eſſe peripheriam circuli nemo non videt.

325. *Probl. Datis in recta* MN *partibus inaequalibus* AB et BC *inuenire locum oculi* H, *e quo aequales adpareant.* Fig. 96.

Reſol. Sit locus oculi quaeſitus H, ductis inde rectis HA, HB, HC aequales eſſe debebunt anguli AHB et BHC. Demittatur ex H ad MN perpendiculum HG, ſitque $AB=a$, $BC=b$, $BG=x$, $GH=y$, erit $AG=a+x$, $GC=b-x$, $AH=\sqrt{(AG^2+GH^2)}=\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}$, $HC=\sqrt{(GC^2+HG^2)}=\sqrt{(b^2-2bx+x^2+y^2)}$. Cum vero angulus AHC per rectam HB bifariam ſectus ſit, erit $AH:HC=AB:BC$, ſeu $\sqrt{(a^2+2ax+x^2+y^2)}:\sqrt{(b^2-2bx+x^2+y^2)}=a:b$, et eleuando ad quadratum $a^2+2ax+x^2+y^2:b^2-2bx+x^2+y^2=a^2:b^2$, adeoque etiam differentia antecedentium erit ad differentiam conſequentium vt $a^2:b^2$, ſeu $2ax+x^2+y^2:-2bx+x^2+y^2=a^2:b^2$, et hinc $y^2=\frac{2abx}{a-b}-x^2$, quae eſt aequatio ad circulum, cuius diameter eſt $=\frac{2ab}{a-b}$ (268). Vbicunque ergo collocetur oculus in circuli huius peripheria, partes illae inaequales adparebunt eſſe aequales.

CAPVT III.

De Transformationibus Locorum Geometricorum.

326. Poſteaquam problema indeterminatum ad locum aliquem geometricum reductum eſt, ſi in problemate conditiones quaepiam mutentur, mutatur plerumque etiam locus eiuſdem geometricus, ita vt vna eademque ſolutionis lex pro conditio-

num diuerſitate diuerſa ſuppeditet loca geometrica; cuius quidem rei attenta contemplatio tironi perutilis erit non ſolum ad naturam huiuſmodi locorum penitius cognoſcendam, ſed etiam ad peruidendum nexum quemdam arctiſſimum in hiſce mutationibus, ex quo illud exſiſtet, vt quae ante diuerſiſſima, nulloque inter ſe vinculo cohaerentia iudicabat, incipiat deprehendere ſub eadem generali ſolutionis lege comprehendi.

327. Hunc autem in finem aſſumet problematis cuiuſdam ſolutionem facillimam, ac diligenter obſeruabit locum eiuſdem: tum conditiones problematis ipſe pro arbitrio mutabit; finget lineas quaſdam infinite produci; eaſdem parallelas vel perpendiculares euadere; circulos abire in rectas centris infinite recedentibus; eoſdem abire in puncta radiis euaneſcentibus etc. ac in ſingulis mutationibus ſedulo obſeruabit, quaenam in loco geometrico accidant mutationes. Exemplum rei huius aliquod iam in ſuperioribus occurrit (313 et ſeq.); hoc autem loco eandem ex propoſito luculentis aliquot exemplis illuſtrabimus.

Exempla.

Fig. 97. I. Quaeratur menſura cuiuſpiam anguli ad circuli peripheriam relati, quae res tametſi ad loca geometrica proprie non pertineat, mirifice tamen praeſentem doctrinam illuſtrabit. Aſſumamus igitur vnum anguli eiuſmodi caſum, ac ponamus eundem eſſe ACB, qui formetur a duabus chordis BD et AE extra centrum ſeſe interſecantibus: conſtat ex elementis menſuram eiuſdem eſſe ſemiſummam arcuum AB et DE ab iiſdem chordis interceptorum. Contemplemur iam diuerſiſſimas puncti C poſitiones, et videamus, quaenam in quauis hypotheſi accidant mutationes in menſura anguli C, et quam diuerſa theoremata hoc vno includantur.

1) Abeat punctum C in centrum G, iam arcus DE abibit in FE=AB, eritque eorum ſemiſumma =AB, hoc eſt, *angulus ad centrum habebit pro menſura arcum, cui inſiſtit.*

2) Abeat punctum C ad peripheriam in E, iam arcus ED euaneſcet, eritque ſemiſumma arcuum AB et ED, ſeu $\frac{1}{2}$ (AB+ED)=$\frac{1}{2}$AB, hoc eſt *angulus in peripheria a duabus chordis formatus habebit pro menſura dimidium eius arcus, cui inſiſtit.*

3) Abeat punctum C extra peripheriam ad H, abibit punctum E in F, et arcus DF habebit directionem arcui DE contrariam, fietque negatiuus; hinc menſura anguli H, ſeu ſemiſumma arcuum priorum AB et DE erit $\frac{1}{2}$ (AB—DF), hoc eſt *angulus habens verticem extra peripheriam habebit pro menſura ſemidifferentiam arcuum a cruribus interceptorum.*

4) Abeat punctum C ex H in infinitum, punctum F abibit in I, et angulus H euaneſcet, adeoque euaneſcet etiam ſemidifferentia arcuum AB et DI, ſeu fiet AB=DI, hoc eſt, *chordae parallelae in eodem circulo aequales arcus intercipient.*

5) Abeat punctum C verſus H vltra infinitum, vt ſic loquar, ſeu creſcat arcus DI puncto I abeunte in K, redibit angulus KLD ex parte oppoſita, eritque negatiuus, ac eius menſura $\frac{1}{2}$ (AB—DK) pariter negatiua; ſin autem poſitiue ſumatur, erit eius menſura $\frac{1}{2}$ (DK—AB) pariter poſitiua.

6) Abeat punctum C a K vſque in A, ita vt ab E diſtet per ſemiperipheriam EIA, angulus prior L abibit in M, fietque recta MA tangens, ac angulum NMD menſurabit ſemidifferentia arcuum DKA et AB, ſeu ob AB=DI, menſurabit arcus $\frac{1}{2}$IA: eſt vero angulus NMD=NAI ob rectas AI et MD parallelas: ergo etiam angulum NAI menſurabit idem arcus $\frac{1}{2}$AI, hoc eſt, *angulus qui in peripheria fit a chorda et tangente, habebit pro menſura dimidium arcus a chorda ſubtenſi.*

7) Abeat punctum C ab A in O, menſura anguli ORD adhuc erit ſemidifferentia arcuum DIAO et OB.

8) Abeat punctum C ex O in B, recta AOR fiet chorda, ac arcu OB euaneſcente menſura anguli ABD erit, vt ſupra, dimidius arcus AID, cui inſiſtit. Sin autem puncto O in B abeunte recta AOR deſerto puncto A euadat in B tangens, angulus B habebit pro menſura dimidium arcus DIAB a chorda BD ſubtenſi, vt ſupra.

9) Denique abeat punctum C ex B vlterius in P, iam arcus BP mutabit directionem, ac proinde menſura anguli AQD erit ſemiſumma arcuum AD et BP, atque ita redibitur ad eun-
Fig. 98, 99, 100. dem caſum, a quo initium exempli propoſiti ſumſimus.

II. Si in tribus figuris ſequentibus erecto ad rectam AB perpendiculo indefinito ER fiant anguli ad E vtrinque aequales, ac in perpendiculo illo puncto quouis F aſſumto ducatur per illud recta T*t* cum ER comprehendens angulum ſemirectum, et ſumantur E*l* = E*n*, EO = EQ etc. ac ducantur rectae LN, *ln*, OQ etc. tum centro F interuallo RQ = RO inueniantur in recta OQ puncta P et *p*, et quaeratur curua per huiuſmodi puncta P et *p*, item per M et *m* ducta, oſtenſum eſt in elementis eandem fore ſectionem conicam. Videamus iam, quaenam eueniant in loco geometrico horum punctorum mutationes pro varia aſſumtarum conditionum determinatione.

1) Si in Fig. 98. angulus LEN acutus fuerit, erit angulus MEN ſemirecto minor, adeoque MNE ſemirecto maior, et hinc MN, ſeu LM vel FM < ME: ergo ſectio conica erit ellipſis, quae angulo illo LEN ſenſim creſcente, ſeu puncto *l* continenter recedente ſenſim allongabitur, donec in Fig. 99. abeat in paraboſam angulo eodem in rectum abeunte. Si porro angulus idem creſcat, ac obtuſus euadat, fiet in Fig. 100. FM > ME, et hinc mutabitur parabola in hyperbolam. 2) Si

2) Si manente eodem angulo mutetur recta FM, manebit ſpecies ſectionis conicae, ſed magnitudo mutabitur.

3) Si punctis M et F manentibus punctum E continenter accedat ad M, angulus E initio acutus continenter accedet ad rectum, et ellipſis oblongabitur, ac abibit in parabolam angulo illo recto euadente, vti ante dictum eſt, punctis *l*, et *m* infinite recedentibus: at angulo eodem vltra rectum creſcente parabola migrat in hyperbolam, puncto *m* regrediente ab infinito ex parte oppoſita reſpectu puncti E in Fig 100. ac bini hyperbolae rami erunt quodammodo dimidia ellipſeos iam plus quam infinitae plagas oppoſitas reſpicientia.

4) Si manentibus punctis ellipſeos F, L, M, N in Fig. 98. rectae EG et EI in Fig. 101. euadant parallelae, ita vt punctum E, et directrix AB nuſquam iam ſit, ellipſis mutabitur in circulum focis in centro coeuntibus, eritque quaelibet FP ſeu RQ=VF, et hinc omnia puncta P erunt in circuli peripheria. Fig. 101.

5) Si in ellipſi Fig. 98. punctis F et E manentibus minuatur ratio FM: ME, ſeu FV: MN in infinitum, ac tandem euaneſcat, puncta V et U accedent ad F, ac tandem in illud recident, vti et rectae EG et EI in rectam E*m*: ac interea puncto *l* verſus L, ſeu puncto *m* verſus M accedente tota ellipſis contrahetur verſus focum F, ac tandem in vnicum illud punctum F definet.

6) Si in hyperbola Fig. 100. ratio FM: ME, ſeu FV: MN infinite excreſcat, puncta V et *u* ab F recedent infinite, ac nuſquam erunt: quare rectae EG et EI in directricem AB recident, punctis L et *l*, ſeu M et *m* accedentibus ad punctum E, ac demum in ipſum recidentibus; interea vero ramus vterque hyperbolae ſeſe expandet, ac tandem in directricem AB recidet.

7) Si manente ratione FM: ME, seu FV: MN, et puncto E, focus F ita sensim accedat ad E, vt tandem in ipsum recidat, punctis L et *l*, seu M et *m* coeuntibus in E ellipsis tota abibit in vnicum punctum E: parabola in rectam axi perpendicularem: hyperbola in duas rectas ad directricem AB ita inclinatas, vt sinus totus sit ad sinum anguli inclinationis vt FM: ME.

8) Si denique focus F a puncto E sensim recedens infinite abeat, auferet secum et rectam *Tt*, et vertices M, *m*, totasque curuas, ita vt nusquam amplius futurae sint.

III. Si quaeratur locus geometricus, in quo haereant centra circulorum datos duos circulos tangentium, patet diuersos in hoc problemate includi casus. Nam circuli dati vel aequales, vel inaequales sunt; vel a se distant, vel se tangunt, vel se secant, vel minor intra maiorem continetur cum contactu, vel sine contactu; circulus item petitus vel ambos datos tanget sua peripheria conuexa; vel ambos concaua; vel vnum conuexa, alterum concaua.

Fig. 102, 103. Vt iam adpareat hos tam dissimiles, aliosque complures casus ad eandem solutionis legem pertinere, ponamus datos circulos inaequales a se distare sine contactu, quorum centra sint A et B, petique circulum 1) qui vtrumque tangat sua peripheria conuexa, 2) sua peripheria concaua, 3) maiorem conuexa, minorem concaua, 4) maiorem concaua, minorem conuexa.

1mo. Capiatur recta AV in Fig. 102. aequalis differentiae radiorum AM et BN, ac ea tanquam radio centro A describatur circulus; tum recta AB centra datorum circulorum connectens secetur bifariam in puncto P, et radio PA describatur nouus circulus occurrens circulo radio AV descripto in punctis V et *u*, per quae ducantur radii AT et AQ, deinde in arcu VD*u* assumatur quoduis punctum D, e quo ducatur recta DB, secturque bifariam, et perpendiculariter per rectam indefinitam RC,

cui occurret recta ex A per D ducta alicubi in C, erit C centrum circuli radio CM describendi, qui datos tanget sua peripheria conuexa in M et N. Nam ob angulos rectos ad R, et ob RD =RB, et DC=BC; item ob AD=AM—BN, erit AM—AD=DM=BN: ergo tollendo DM a DC, et BN a BC, erit CM=CN, quae cum transeant per centra A et B, tangentur dati circuli in punctis M et N a circulo descripto radio CM. Erit autem centrum C in hyperbola axe transuerso AD=AM—BN descripta circa focum B: vbicunque enim sumatur punctum D, semper erit AC—BC=AD, quae est hyperbolae proprietas (Elem. 646).

2*do*. Capiatur punctum *d* vbicunque extra arcum VD*u*, ducaturque recta *d*B bifariam, et perpendiculariter secanda per rectam *rc* occurrentem rectae ex *d* per A ductae alicubi in *c*, erit *c* centrum circuli radio *cm* describendi, qui datos tanget sua peripheria concaua in *m* et *n*. Erit enim vt supra *cd*=*c*B, quibus addendo aequalia *dm* et B*n*, erit *cm*=*cn*. Est autem centrum *c* in hyperbola priori opposita, seu circa focum A axe transuerso A*d*=A*m*—B*n* descripta, cum vbicunque sumto puncto *d* semper sit B*c*—A*c*=A*d*.

3*tio*. Fiat in Fig. 103. AV=AM+BN, et reliqua vt ante, erit CD=CB, quibus addendo aequalia MD et NB erit CM=CN; hinc circulus radio CM descriptus tanget maiorem peripheria sua conuexa in M, minorem concaua in N, eritque centrum C in hyperbola axe transuerso AD=AM+BN circa focum B descripta, cum semper sit AC—BC=AD.

4*to*. Eodem prorsus modo patet a circuli radio *cm* descripti peripheria concaua tangi circulum maiorem in *m*, et a peripheria conuexa tangi minorem in *n*, esseque centrum *c* in hyperbola opposita eodem axe circa focum A descripta.

Contemplemur iam mutationes, quas inuentus locus geometricus in ſingulis hiſce caſibus ſubit, variatis conditionibus quibuſdam.

1) Si in omnibus caſibus pro punctis D et *d* ſumantur puncta V et *u*, anguli ADB et A*d*B euadent recti, et hinc rectae
Fig. 104. AT et RC, item AQ et *rc* in Fig. 104. euadent parallelae: quare centris C et *c* infinite recedentibus circuli ducendi mutabuntur in rectas tangentes T*t* et Q*q*.

2) Si in caſu Figurae 102. circuli dati aequales fuerint, radiorum differentia, ſeu axis hyperbolae, euaneſcit, adeoque
Fig. 105. hyperbolae ambae in Fig. 105. abeunt in rectam CC, perpendicularem ad AB, ac eandem biſecantem, quae proinde erit omnium centrorum locus.

3) Si in caſu eiuſdem Figurae circuli inaequales ſe externe tangant, vt in Fig. 104, vel ſecent, locus centrorum manebit hyperbola; at in caſu circulorum ſeſe interſecantium tranſibit per ipſa interſectionum puncta.

Fig. 106. 4) Si in eodem caſu circulus minor intra maiorem cadat ſine contactu, locus centrorum abibit in ellipſim. Recta enim BD in R bifariam ſecta, et erecto perpendiculo RC, erit C centrum quaeſitum. Nam erit CD = CB, quibus addendo aequalia DM et BN erit CM = CN, quo radio ductus circulus tanget minorem in N ſua peripheria concaua, maiorem in M ſua peripheria conuexa. Erit autem AC + CB = AD: vnde patet locum centrorum fore ellipſim axe tranſuerſo AD focis A et B deſcriptam (Elem. 646).

5) Si vero in eodem caſu circuli ſe interne tangant, cum differentia radiorum AQ — BQ = AD, ſeu axis tranſuerſus ellipſeos fiat aequalis diſtantiae focorum AB, ellipſis erit infinite arcta, ſeu abibit in rectam AB, in qua proinde erunt centra C.

6) Si in casu Figurae 103. circuli se externe tangant, so-
corum distantia aequabitur summae radiorum, seu axi transuerso
hyperbolae, quare hyperbolae ambae abibunt in lineam rectam,
in qua iacebunt centra circulorum tangentium.

7) Si in eodem casu circuli se interne tangant, locus cen- Fig. 107.
trorum abibit in ellipsin. Sit enim punctum contactus Q, summa
radiorum BP, qua tanquam radio centro B describatur circulus,
et ceteris de more peractis erit C centrum circuli quaesiti. Nam
erit CA=CD, et hinc AC+CB=BD; et quia BN est radius
circuli minoris, eo ablato a summa AC+CB erit AC+CN=
AC+CM, et CM=CN; adeoque circulus radio CM descri-
ptus tangit datos in M et N; ac ob AC+CB=BD centrum C
est in ellipsi circa focos A et B axe transuerso BD descripta.

8) Si circulus, cuius centrum est B, euadat infinite par- Fig. 108.
uus, seu abeat in vnicum punctum B, summae vel differentiae
radiorum in casibus praecedentibus succedit radius circuli maioris,
et problema mutatur in hoc: ducere circulum, qui per datum
punctum transeat, et datum circulum tangat. Porro rectae BD
priorum casuum succedit BT, qua per rectam CF bifariam, et
perpendiculariter secta erit CF parallela ad AT, quae hic succe-
dit rectae AD, adeoque centrum infinite distabit, et circulus
quaesitus abibit in tangentem BT: reliquorum circulorum datum
tangentium, et per punctum B transeuntium centra erunt in hy-
perbolis oppositis, quarum asymptoti sunt CF et C*f*, axis trans-
uersus AT.

9) Si ambo circuli abeant in puncta A et B, tam summa, Fig. 109.
quam differentia radiorum fit =0, adeoque hyperbolae abibunt
in rectam PS, quae rectam AB bifariam, et perpendiculariter
secat, in qua erunt centra circulorum per puncta A et B ducen-
dorum.

Fig. 110. 10) Si manente circulo A alterius centrum infinite recedat, abibit eiuſdem peripheria in rectam PR, et in hoc caſu nequit deſcribi circulus radio aequali ſummae vel differentiae radiorum; poteſt tamen radio AM ex Q in B translato recta NB haberi pro circulo infinite magno, centro infinite diſtante, cuius radius ſit radiorum differentia; poteſt item recta SV haberi pro circulo, cuius radius ſit radiorum ſumma, et centrum ab A infinite diſtet. Quibus poſitis manifeſtum eſt hyperbolas circa focum A deſcriptas mutari in parabolas DEF, et GIH, quarum prioris directrix eſt NB, poſterioris SV: eſt enim AC=CN, ob AM=μN, et MC=Cμ; item ab aequalibus *cm* et *cn* demendo aequalia *Am* et *on* ex conſtructione, erit *Ac*=*co* (Elem. 608). Si ergo in priore parabola capiatur vbicunque centrum C, et radio CM deſcribatur circulus, tanget datum in M, et rectam PR in μ: ſi vero in poſteriore capiatur vbicunque centrum *c*, ac radio *cm* deſcribatur circulus, tanget datum in *m*, et rectam PR in *n*.

Fig. 111. 11) Si recta PR ſecaret datum circulum, eodem modo oſtenderetur tam ellipſi, quam hyperbolae ſuccedere parabolam, vt adparet in Fig. 111.

Fig. 112. 12) Si circulorum datorum vnus fiat infinite magnus, ſeu in rectam abeat, alter infinite paruus, id eſt, in punctum deſinat, hyperbolae ſuccedit parabola, cum ſemper ſit AC=CM.

Fig. 113, 114. 13) Si denique circulus fiat vterque infinite magnus, vterque abibit in lineam rectam, et tunc etiam hyperbola abibit in rectam duabus illis parallelam, et in medio poſitam, ſiquidem illae parallelae fuerint, vt in Fig. 113, vel angulum ab iis formatum biſecantem, vt in Fig. 114.

IV. Addimus exemplum ſequens maximi in phyſica momenti, quod priuſquam adgrediamur, ſequens theorema ſuis cum corollariis praemittimus.

Theor. Si mobile feratur in ſectione conica, verratque circa focum areas temporibus proportionales, erunt vires ad focum tendentes in diuerſis punctis in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a foco.

Demonſtr. Sit CH ſemiaxis tranſuerſus, CB ſemiaxis coniugatus, S et F foci, CD ſemidiameter coniugata diametri PO, ac parallela tangenti per punctum P ductae, et ſit in eam demiſſum perpendiculum PK, ac ſint areolae infinitesimae SPE aequalibus temporibus deſcriptae aequales, ducaturque ex puncto E recta EL tangenti parallela, exprimet PL vim ad focum S tendentem. Porro ſit areolae SPE duplum $=a$, et ex E ad SP productam demittatur perpendiculum EN, erit $a=SP\times EN$, et hinc $EN=\frac{a}{SP}$: eſt autem PK: AC = CB: CD (Elem. 688); ergo $AC\times CB=PK\times CD$: eſt item CD^2: $CP^2=EM^2$: $OM\times MP$ (689), vnde $OM\times MP=\frac{CP^2\times EM}{CD^2}$. Quia vero pro OM ſumi poteſt $OP=2CP$, diuidendo hinc per $2CP$, illinc per OM erit $MP=\frac{CP\times EM^2}{2CD^2}$ ſeu $\frac{2CD^2\times MP}{CP}=EM^2$, vnde $\frac{2CD^2}{CP}$: EM = EM: MP; cum ergo EM ſit quantitas infinite parua reſpectu finitae $\frac{2CD^2}{CP}$, erit etiam PM infinite parua reſpectu EM: quare cum ſit LM ad MP in ratione finita GC ad CP, erit LM infinite parua reſpectu EM, poteritque LE ſumi per ME, vnde $MP=\frac{CP\times EL^2}{2CD^2}$; eſt autem PG = AC (Elem. 674), et CP: GP = PM: PL, quare etiam CP: $AC=\frac{CP\times EL^2}{2CD^2}$: PL, vnde $PL=\frac{AC\times EL^2}{2CD^2}$.

Denique ob triangula PKG, PIL, ENL ſimilia erit PK: PG = EN: EL, ſeu PK: $AC=\frac{a}{SP}$: EL, et hinc $EL=\frac{a\times AC}{SP\times PK}$, quo valore ſubſtituto erit $PL=\frac{a^2\times AC^2}{2SP^2\times PK^2\times CD^2}$: fuit autem ſi-

Fig. 115, 116, 117.

pra $AC \times CB = CD \times PK$, quare hoc valore substituto erit $PL = \frac{a^2 \times AC^3}{2SP^2 \times AC^2 \times CB^2} = \frac{a^2 \times AC}{2SP^2 \times CB^2}$: cum ergo variato vtcunque puncto P in eadem sectione conica constans sit quantitas $\frac{a^2 \times AC}{2CB^2}$, erit $PL = \frac{1}{PS^2}$.

Coroll. 1. Si recta PQ iacens in eadem directione, in qua agit vis, aequetur ei altitudini, ex qua labendo corpus motu accelerato, ac vi, quam habet in puncto P, illam acquireret velocitatem, quam in P habet, erit $HA \times PQ = PF \times SP$. Nam tempusculo, quo PE describitur, describeretur PL motu vniformiter accelerato per eandem vim, et LE describeretur interea motu aequabili cum velocitate, quae habetur in P, ac eodem tempore, quo PQ lapsu libero describeretur, motu aequabili, velocitate finali describeretur eius duplum 2PQ: est ergo PL ad PQ vt quadratum temporis per PL ad quadratum temporis per 2PQ, quae tempora cum sint vt LE: 2PQ, erit $PL : PQ = LE^2 : 4PQ^2$, vnde $PL = \frac{LE^2}{4PQ}$, adeoque ex dictis supra $= \frac{AC \times EL^2}{2CD^2}$, hinc $\frac{1}{4PQ} = \frac{AC}{2CD^2}$, seu $CD^2 = 2AC \times PQ = HA \times PQ$; atqui semidiameter coniugata CD est media proportionalis inter distantias focorum SP et FP a vertice P, seu $CD^2 = SP \times FP$: ergo $HA \times PQ = SP \times FP$.

Coroll. 2. Si fiat $SR = HA$ in ellipsi versus punctum P, in hyperbolae ramo citeriore versus focum S concauo ad partes oppositas puncti P, in ramo vlteriore ad partes puncti P, erit SR tertia proportionalis ad SQ et SP. Cum enim in ellipsi sit $SP + FP = SR$, in hyperbola $FP - SP$ vel $SP - FP = SR$, semper erit $PR = PF$; quare cum supra fuerit $HA \times PQ = SP \times FP$, erit $SR \times PQ = SP \times PR$, et hinc $SR : PR = SP : PQ$, vnde in Fig. 115.

erit

erit SR: SR — PR = SP: SP — PQ, seu SR: SP = SP: SQ; in Fig. 116. SR: PR — SR = SP: PQ — SP, seu SR: SP = SP: SQ; et in Fig. 117. erit SR: SR + PR = SP: SP + PQ, seu SR: SP = SP: SQ.

Hisce praemissis accedamus iam ad exemplum ipsum. Quaeritur locus corporis, quod oblique proiicitur data directione, celeritate proiectionis, et vi tendente ad punctum, vel a puncto extra directionem ipsam posito in ratione reciproca duplicata distantiarum. Sit centrum virium S, directio proiectionis PT, gra- Fig. 118, uitas nostra rerrestris ad vim in puncto P vt $1 : v$, et spatium da- 119, 120. ta illa velocitate, quacum fit proiectio intra $1''$ percurrendum $= s$: cum grauia nostra intra $1''$ percurrant proxime 15 ped. et 1 dig. seu 181 dig. et in fine lapsus eam acquirant celeritatem, qua intra idem tempus duplum spatium, seu intra $1''$ digitos 2×181 percurrerent, sintque altitudines huiusmodi vt quadrata celeritatum directe, et vires reciproce, inuehiri poterit altitudo x, per quam labendo corpus eam acquireret velocitatem, quacum proiicitur, inferendo nempe $\frac{4 \times 181 \times 181}{1} : \frac{s^2}{v} = 181 : x$, vnde $x = \frac{s^2}{4v \times 181} = \frac{s^2}{724v}$. Fiat ergo $PQ = x$ versus eam partem, in quam vis tendit, et quaeratur SR tertia proportionalis ad SQ et SP versus eandem partem cum SQ, ducaturque RD perpendicularis ad PT, ac in eadem producta fiat $DF = RD$; deinde focis S et F, axe transuerso $HA = SR$, cuius, vti centri positionem foci determinant, describatur sectio conica PE, erit ea locus quaesitus.

Erit enim $PR = PF$, adeoque SR erit summa, vel differentia earundem, et hinc sectio conica transibit per punctum P, et ob angulos RPD et FPD aequales erit PT eiusdem tangens, adeoque directio proiectionis fiet secundum tangentem sectionis

conicae. Porro euidens eſt corpus data quauis velocitate per tangentem PT proiectum poſſe hanc ſectionem deſcribere, modo vires et initio, et poſtea tales ſint, vt ipſum a directionibus tangentium perpetuo deflectant ad ſectionis conicae arcum: ergo hac ipſa velocitate, et directione PT proiectum hanc ſectionem conicam reapſe deſcribet, ſi vis talis ſit, qualis ad eam deſcribendam requiritur. Eſt autem talis: nam ex dictis dum a corpore haec ſectio conica deſcribitur, altitudo illa, per quam vi, quam corpus habet in P, labendo eam acquireret velocitatem, quam ibidem habet, eſt recta PQ: ergo cum et velocitas, et altitudo PQ eadem ſit, vis quoque data eadem erit initio, quae ad hanc ſectionem deſcribendam requiritur; atqui vis data ex hypotheſi eſt in ratione eadem reciproca duplicata diſtantiarum a foco S, in qua eſſe debet vis ad hanc ſectionem deſcribendam: ergo haec vis tam initio, quam deinceps conſtanter talis eſt, qualis ad deſcribendam hanc ſectionem conicam requiritur: ergo corpus proiectum eam deſcribet.

Contemplemur iam varias loci huius geometrici mutationes variatis problematis conditionibus.

1). Si directio proiectionis per ipſum focum S tranſeat, euidens eſt ſectionem conicam abire in rectam, viribus cum vi proiectionis aut penitus conſpirantibus, aut penitus aduerſantibus.

Fig. 118. 2) Si vires tendant ad focum S, ſeu attractiuae ſint, et ſit $PQ<SP$, PQ ſemper cadet verſus S, quo vires tendunt, punctum vero R cadet ad partes oppoſitas tangentis PT reſpectu foci S, ac alter focus F cadet ad eaſdem partes cum foco S: quare ſectio conica erit ellipſis.

Fig. 121. 3) In eodem caſu ſi directio proiectionis PT perpendicularis fuerit directioni virium SP, et fuerit $PQ<SQ$, ſeu $PQ<\frac{1}{2}SP$, manebit ellipſis, at punctum proiectionis congruet cum apſi-

de ſuperiore a foco S remotiore. Nam in hoc caſu perpendiculum RD congruet cum virium directione, quare etiam focus F iacebit in eadem recta PS, in quam et axis tranſuerſi vertices, ſeu apſides abibunt, eritque earum vna in P: eſt autem SR: SP = SP: SQ, ac ſubtrahendo PR: SP = PQ: SQ, ſeu PF: SP = PQ: SQ; ſi ergo fuerit PQ < SQ, erit etiam PF < SP: quare apſis P, in qua fit proiectio, erit a centro virium S remotior, quam apſis H, cum ſit HS = PF.

4) Si vero in eodem caſu fuerit PQ > SQ, ſeu PQ > $\frac{1}{2}$ SP, eodem modo patet fore PF > SP, ſeu AS > SP, et hinc apſidem P, in qua fit proiectio, centro virium S viciniorem fore, quam apſidem alteram A. Fig. 122.

5) Si in eodem caſu fuerit PQ = SQ = $\frac{1}{2}$ SP, eodem modo patet fore PF = SP, adeoque focis S et F coeuntibus ellipſim abituram in circulum. Fig. 123.

6) Si vires attractiuae fuerint, et PQ = SP, euaneſcente recta SQ axis SR et focus F abibunt in infinitum, ac proinde ellipſis degenerat in parabolam, quae facile deſcribitur. Si enim in recta SP producta aſſumatur quoduis punctum M, e quo ad PT ducatur perpendicularis MDN, fiatque DN = MD, et ex P per N ducatur recta indefinita PN, ob angulos MPD et NPD aequales erit NP diameter parabolae, qua data vna cum foco S, et vertice P, ac directione ordinatarum tangenti PT parallelarum, datur parabola ipſa. Fig. 124.

7) Si in caſu eodem fuerit PQ > SP, punctum R cadet ad eaſdem partes cum foco S reſpectu tangentis PT, adeoque alter focus F ad partes oppoſitas: quare ſectio conica erit hyperbola, in qua cum ſit SP < PR, adeoque SP < PF, focus S erit vicinior puncto proiectionis P, quam focus F, et hinc ramus PE, quem decurret corpus, erit ramus citerior, intra quem iacet ipſe focus S. Fig. 119.

Fig. 120. 8) Si denique vires repulſiuae fuerint, ſeu dirigantur ad partes oppoſitas centri virium S, iacebit PQ pariter ad partes ipſi oppoſitas, cuiuſcunque fuerit magnitudinis: quare punctum R iacebit inter P et S, ac punctum F ad partes oppoſitas tangentis PT; quare ſectio conica erit, vt ante, hyperbola: ſed quia SP > PR, ſeu SP > FP, ramus PE, quem corpus proiectum decurret, erit ramus vlterior, extra quem iacet centrum virium S.

CAPVT IV.

De Conſtructione Locorum Geometricorum primi gradus.

328. Perſpicuum eſt loca omnia geometrica primi gradus eſſe ad lineas rectas. Omnes enim aequationes loca huiuſmodi exhibentes ad has formulas reuocari poſſunt. 1) $y = x$. 2) $y = \frac{mx}{n}$. 3) $y = \frac{mx}{n} + q$. 4) $y = \frac{mx}{n} - q$. 5) $y = q - \frac{mx}{n}$. 6) $y = q$. 7) $x = q$, in quibus quantitas q denotat omnes terminos cognitos, $\frac{m}{n}$ omnes coefficientes incognitae x: harum autem omnium formularum locum eſſe lineam rectam patebit ex earundem conſtructione.

329. *Probl. Conſtruere aequationem* $y = x$.

Fig. 125. *Reſol.* Iungantur ſub angulo recto axes coordinatarum AB et AD, ac biſecetur angulus A per rectam indefinitam AC; tum deligatur abſciſſa quaeuis $AP = x$, erit eius ordinata $PM = y$. Locus ergo aequationis propoſitae eſt recta AC.

330. *Probl. Conſtruere aequationem* $y = \frac{mx}{n}$.

Fig. 126. *Reſol.* Iungantur ſub angulo dato, vel aſſumto axes coordinatarum indefiniti AB et AK, fiatque $AD = n$, ordinata DE parallela ad $AK = m$, ducaturque recta indefinita AEC; tum deligatur abſciſſa quaeuis $AP = x$, erit ordinata $PM = y$. Eſt enim

AD: DE = AP: PM, seu $n : m = x : y$, vnde $y = \frac{mx}{n}$. Locus ergo aequationis est recta AC.

131. *Probl. Construere aequationem* $y = \frac{mx}{n} + q$.

Resol. Producatur recta ED in I, vt fiat DI = q, ac per I ducatur recta indefinita FR ad AB parallela, cui occurrat axis ordinatarum KA productus in F: erit quaelibet FQ = AP = x, ac ei respondens ordinata QM = y. Est enim PM = $\frac{mx}{n}$ (329), et PQ = q: ergo QM = $\frac{mx}{n} + q = y$. Locus ergo aequationis est recta AC, et axes coordinatarum FR et FK.

332. *Probl. Construere aequationem* $y = \frac{mx}{n} - q$.

Resol. Producatur recta AC donec rectae FR productae occurrat alicubi in G, fiatque GI = n, IE = m, quaelibet GQ = x, erit ei respondens ordinata QM = $\frac{mx}{n}$ (329). Fiat ID = q, et per D ducatur recta AB indefinita parallela ad GR, item GH ad FK, erit quaelibet PQ = ID = q, et hinc quaelibet PM = $\frac{mx}{n} - q = y$. Locus ergo aequationis est recta AC, et axes coordinatarum HB et HG.

333. *Probl. Construere aequationem* $y = q - \frac{mx}{n}$.

Resol. Iungantur sub angulo dato, vel assumto axes coordinatarum AG et AH, fiatque AG = q, AD = n, DF = m parallela ad AG; tum per puncta A et F ducatur recta indefinita AB, et huic per G parallela GH indefinita, cui recta FD producta occurrat in E. Deligatur iam quaeuis abscissa AP = x, erit eius ordinata PM = y. Est enim AD: DF = AP: PQ, seu $n : m = x$: Fig. 127.

$PQ=\frac{mx}{n}$, vnde $PM=QM-PQ=q-\frac{mx}{n}=y$. Locus ergo aequationis eſt recta GH.

334. *Coroll.* Si abſciſſa Ap pertingat vltra H, erit $pQ>q$, adeoque ordinata *pm* negatiua. Si abſciſſa pertingat ad H, erit $PQ=Hh$, ſeu $\frac{mx}{n}=q$, et hinc ordinata $PM=y=q-\frac{mx}{n}=0$.

335. *Probl. Conſtruere aequationem* $y=q$.

Reſol. Sub dato, vel aſſumto angulo rectae AB iungatur indefinita AG, fiatque $AG=q$, et per G ducatur recta GH indefinita parallela ad AB: vbicunque ſumatur in recta AB punctum Q, et ducatur QM ad AG parallela, ſemper erit $QM=AG$, ſeu $y=q$. Eſt ergo locus aequationis recta GH.

336. *Probl. Conſtruere aequationem* $x=q$.

Reſol. Super recta indefinita AB fiat $AF=q$, et ſub dato, vel aſſumto angulo ducatur recta AG, eidemque parallela FE. Deligatur iam origo abſciſſarum in A, erunt FI, FE etc. ordinatae, KI, GE etc. $=AF$ erunt abſciſſae: quare $x=q$. Eſt ergo locus aequationis recta FE.

337. *Probl. Datum quemuis locum geometricum primi gradus conſtruere.*

Reſol. Cum omnia huiuſmodi loca, quam demum cunque formam habeant, ad ſuperiores formulas (327) reuocari poſſint, comparentur cum iiſdem, ponendo terminos correſpondentes vtrinque inter ſe aequales eſſe; deinde ad earundem imitationem conſtruantur, ſignorum diuerſitati conuenientes linearum poſitiones adſignando, id quod exemplis rectius docebitur.

Exempla.

Fig. 128. I. Sit conſtruenda aequatio $y=\frac{bh}{e}-\frac{dx}{e}$. Comparando hanc aequationem cum formula quinta ſuperiori erit $\frac{bh}{e}=q$, et $-\frac{d}{e}=-\frac{m}{n}$,

seu $\frac{d}{e}=\frac{m}{n}$. Igitur rectis indefinitis AG et AR sub quouis angulo iunctis fiat in prima $AO=b$, in secunda $AN=c$, et $AR=h$, ducaturque recta NO, et ex R eidem parallela RG, erit AN: $AO=AR:AG$, seu $c:b=h:AG=\frac{bh}{c}$. Deinde rectae AG tanquam axi ordinatarum iungatur axis abscissarum AB sub quouis angulo, in qua capiatur $AD=e$, et ducatur ad AG parallela $DF=d$, item per A et F recta indefinita AC, ac per G eidem parallella GI. Si iam inter A et B sumatur quaelibet abscissa $AP=x$, erit eius ordinata $PM=y$. Nam $AD:DF=AP:PQ$, seu $e:d=x:PQ=\frac{dx}{e}$: ergo $PM=MQ-PQ=AG-PQ=\frac{bh}{c}-\frac{dx}{e}=y$. Est ergo locus aequationis recta GI.

Si abscissa cadat in AB, fiet $PQ=MQ=Bb$, seu $\frac{dx}{e}=\frac{bh}{c}$: quare $y=\frac{bh}{c}-\frac{dx}{e}=0$, seu euanescet ordinata PM.

Si fiat abscissa $Ap>AB$, erit $pq>AG$, seu $\frac{dx}{e}>\frac{bh}{c}$, et hinc $y=\frac{bh}{c}-\frac{dx}{e}$ erit quantitas negatiua, id est, ordinata pm iacebit in partem priori contrariam.

Si puncto P in A cadente fiat $AP=x=0$, fiet $PQ=\frac{dx}{e}=0$, et hinc $y=\frac{bh}{c}=AG$.

Si puncto P infra A cadente e. g. in K, abscissa AK euadat negatiua, erit $y=\frac{bh}{c}+\frac{dx}{e}=HT+HK=KT$.

II. Sit construenda aequatio $y=\frac{bx-h^2}{e}+\frac{id}{a}$; comparando eandem cum formula quarta erit $\frac{b}{e}=\frac{m}{n}$, et $-\frac{h^2}{e}+\frac{id}{a}=-q$. Quare iunctis sub quouis angulo rectis indefinitis GR et GZ fiat $GI=e$, Fig. 129.

et ex I ducatur recta IE = b parallela ad GZ, ac per G et E recta indefinita GN, ſitque quaelibet GQ = x, erit eius ordinata QM ad IE parallela = $\frac{bx}{e}$. Porro rectae IE ſub quouis angulo iungatur IK = e, in qua capiatur IY = IL = h, ducaturque KL, ac ex Y eidem parallela YO, erit IO = $\frac{h^2}{e}$. Per punctum O ducatur AB parallela ad GR, erit quaelibet PM = QM — PQ = QM — IO = $\frac{bx-h^2}{e}$. Denique in recta GZ capiatur GD = i, et ſub quouis angulo iungatur GH = d, in quo capiatur GC = a, ductaque recta CD, et huic ex H parallela HZ, erit GZ = $\frac{id}{a}$. Ducatur ergo per Z recta indefinita ZV parallela ad GN, erit quaelibet PT = PM + MT = PM + GZ = $\frac{bx-h^2}{e} + \frac{id}{a} = y$. Eſt ergo locus aequationis recta ZV.

Si puncto Q in X cadente, P cadat in A, erit PM = $\frac{bx-h^2}{e} = 0$, adeoque $y = \frac{id}{a} = AS = GZ$.

Si puncto Q inter X et G cadente, punctum P cadat inter A et F e. g. in p, erit $pm = \frac{bx-h^2}{e}$ quantitas negatiua, et hinc $y = \frac{h^2-bx}{e} + \frac{id}{a} = pt$.

Si Q cadente in G, punctum P cadat in F, erit QM = $\frac{bx}{e} = 0$, adeoque PM = $-\frac{h^2}{e}$, et hinc $y = \frac{id}{a} - \frac{h^2}{e} = GZ - GF = FZ$.

Si puncto Q vltra G e. g. in q cadente, punctum P cadat vltra F e. g. in p, erit qm quantitas negatiua, ſeu = $-\frac{bx}{e}$, adeoque $pm = qm + pq = -\frac{bx+h^2}{e}$, et hinc $pt = tm - pm = \frac{id}{a} + \frac{bx-h^2}{e} = y$.

Si

Si denique punctum P caderet vltra concurſum rectarum BA et VZ, ordinata PT ſitum acquireret contrarium, foretque $-y=-\frac{bx+h^2}{e}-\frac{id}{a}$, quae aequatio eadem eſt cum propoſita.

III. Sit conſtruenda aequatio $y=\sqrt{bd}-\frac{px}{a}+\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}$; comparando eandem cum formula quinta erit $\sqrt{bd}+\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}=q$, et $-\frac{p}{a}=-\frac{m}{n}$, ſeu $\frac{p}{a}=\frac{m}{n}$. Quare iunctis $AF=b$, et $AG=d$ in vnam rectam FG, ac ſuper eadem deſcripto ſemicirculo FDG, erit perpendiculum $AD=\sqrt{bd}$. Porro ſuper recta FG adplicetur in A recta $AK=b$, et huic ſub angulo recto linea $KN=f$, erit $AN=\sqrt{(h^2+f^2)}$. Fiat $AO=AK=h$, et diametro NO deſcribatur ſemicirculus NTO, erit perpendiculum $AT=\sqrt{(AN\times AO)}=\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}$, adeoque $TD=\sqrt{bd}+\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}=q$. Denique per T ducatur vtcunque recta indefinita TC, in qua ſumatur $TI=a$, et per I ducatur $IL=p$ parallela ad TD, ac per T et L recta indefinita TB, eidemque per D parallela DR. Si iam capiatur quaecunque abſciſſa $TP=x$, erit ordinata PM ad TD parallela $=y$. Eſt enim $TI:IL=TP:PQ$, ſeu $a:p=x:PQ=\frac{px}{a}$, vnde $PM=QM-PQ=TD-PQ=\sqrt{bd}+\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}-\frac{px}{a}=y$. Eſt ergo locus aequationis recta DR. Fig. 130.

Si abſciſſa TP congruat cum TH, erit $PM=y=0$, vnde $\sqrt{bd}+\sqrt{(h\sqrt{(f^2+h^2)})}=\frac{px}{a}$, ſeu $PQ=HV=TD$.

Si punctum P cadat vltra H e. g. in p, erit $pm=pq-qm=\frac{px}{a}-\sqrt{bd}-\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}=-y$, et hinc ſitum habebit priori contrarium.

Si punctum P cadat in T, erit $TP=x=o$, vnde et $\frac{px}{a}=o$, adeoque $PM=y=\sqrt{bd}+\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}=TD$.

Si punctum P cadat infra T e. g. in p, erit qp quantitas negatiua, seu $=-\frac{px}{a}$, vnde $pm=y=\sqrt{bd}+\sqrt{(h\sqrt{(h^2+f^2)})}+\frac{px}{a}$.

Fig. 131. IV. Sit construenda aequatio $y=\frac{dx}{p}-\sqrt{5a^2}+\frac{cf}{b}$; comparando eandem cum formula quarta erit $\frac{d}{p}=\frac{m}{n}$, et $-\sqrt{5a^2}+\frac{cf}{b}=-q$. Iungantur ergo sub quouis angulo rectae indefinitae GC et GR, fiatque $GI=p$: et ducatur $IE=d$ parallela ad GC, ac per G et E recta indefinita GV; sumta iam qualibet GQ pro abscissa x, erit eius ordinata $QM=\frac{dx}{p}$. Fiat porro $IF=2a$, cui sub angulo recto iungatur $FD=a$, erit $ID=\sqrt{5a^2}$. Per punctum D ducatur parallela AB ad GR, ac in recta GC capiatur $GO=f$, cui sub quouis angulo iungatur $GN=c$, fiatque $GH=b$, et ducatur recta HO, ac per N eidem parallela NC, erit $GC=\frac{cf}{b}$. Denique per C ducatur recta indefinita CS parallela ad GV: iam quaelibet $PM=QM-QP=QM-ID=\frac{dx}{p}-\sqrt{5a^2}$: ergo quaelibet $PT=PM+MT=PM+GC=\frac{dx}{p}-\sqrt{5a^2}+\frac{cf}{b}=y$. Est ergo locus aequationis recta CS.

Si punctum P cadat in A, erit PM seu $\frac{dx}{p}-\sqrt{5a^2}=o$, adeoque $y=\frac{cf}{b}=GC=At$.

Si punctum P cadat inter A et G e. g. in p; erit pm quantitas negatiua $=\sqrt{5a^2}-\frac{dx}{p}$: quare $pt=mt-pm=\frac{cf}{b}-\sqrt{5a^2}+\frac{dx}{p}=y$.

Si punctum P cadat in K, erit QM seu $\frac{dx}{p}=0$: quare $y=\frac{cf}{b}-\sqrt{5a^2}=GC-GK=KC$.

Si punctum P cadat a sinistris K e. g. in p, erit qm quantitas negatiua $=-\frac{dx}{p}$, adeoque $y=\frac{cf}{b}-\frac{dx}{p}-\sqrt{5a^2}=mt-qm-qp=pt$.

Denique si punctum P cadat vltra concursum rectarum SC et BA, erit PT seu y constanter quantitas negatiua $=\sqrt{5a^2}-\frac{dx}{p}-\frac{cf}{b}$.

CAPVT V.

De Constructione locorum geometricorum secundi gradus.

338. Rursus perspicuum est loca omnia geometrica secundi gradus esse aliquam sectionem conicam. Nam 1) si aequatio vnum solum continet e quadratis coordinatarum x^2, y^2, sine rectangulo xy, locus est ad parabolam. 2) Si continet vtrumque quadratum cum rectangulo xy, et quadratum dimidii coefficientis rectanguli xy aequetur coefficienti quadrati x^2 vel y^2, locus rursus est ad parabolam. 3) Si absente rectangulo xy quadrata x^2 et y^2 idem habent signum, locus est ad ellipsim, vel circulum. 4) Si in eodem casu adsit xy, at quadratum dimidii coefficientis eiusdem minus sit coefficiente quadrati x^2 vel y^2, locus rursus est ad ellipsim vel circulum. 5) Si absente xy quadrata x^2 et y^2 diuersa habeant signa, locus est ad hyperbolam. 6) Si in eodem casu adsit xy, at quadratum dimidii coefficientis eiusdem maius sit coefficiente quadrati x^2 vel y^2, locus iterum est ad hyperbolam. 7) Denique si adsit xy sine quadratis x^2 et y^2, locus est ad hyperbolam intra asymptotos (293). Iam vero nulla est aequatio continens lo-

cum aliquem geometricum ſecundi gradus, quae non habeat aliquam ex hiſce combinationibus.

339. Cum vero in ſuperioribus propoſuerimus formulas ſectionum conicarum tam ſimpliciſſimas (268), quam complicatiſſimas (272. et ſeq.), trademus hic methodum loca geometrica ſecundi gradus vtrarumque ope conſtruendi. Et quidem quod ad primum attinet, reducendae ſunt aequationes propoſitae ad expreſſiones ſimpliciſſimas (268), et a ſuppoſita illarum conſtructione, quae in Elementis traditur, ad harum conſtructiones tranſeundum eſt.

340. Hunc porro in finem aequationes propoſitae ad tres claſſes reuocari poterunt. *Prima claſſis* eas continebit, in quibus vnius duntaxat coordinatae quadratum adeſt cum producto alterius in quaſuis conſtantes, qualis eſt aequatio $y^2 = ax \pm ab$: eas item, in quibus adeſt rectangulum xy ſine quadratis coordinatarum. *Secunda claſſis* eas continebit, in quibus ſine rectangulo illo xy adeſt quadratum vnius, vel vtriuſque coordinatae cum producto vnius, vel vtriuſque in conſtantes, qualis eſt aequatio $x^2 + 2ax = y^2 + by - cx$. *Tertia claſſis* eas continebit, in quibus adeſt xy cum aliis terminis quo demum cunque modo compoſitis, qualis eſt aequatio $x^2 + 2xy + 2y^2 = a^2 - x^2 + bx$.

341. *Probl. Conſtruere aequationes primae claſſis.*

Reſol. Coordinata illa, cuius quadratum deeſt in aequatione, quantitate aliqua conſtante aucta, vel diminuta pro ratione ſignorum, ponatur aequalis nouae cuidam indeterminatae, vt per ſubſtitutionem, ſi opus fuerit repetitam, aequatio formam acquirat ſimpliciorem (268), quae facile dignoſci, ac deinde conſtrui poſſit. Rem exemplis aliquot illuſtrabimus.

Exempla.

I. Sit conſtruenda aequatio $x^2 - ay + b^2 = 0$. Fiat imprimis $b^2 = am$, erit facta ſubſtitutione $x^2 - a(y - m) = 0$. Fiat rurſus $y - m = u$, erit $x^2 = au$, quae eſt aequatio parabolae ad conexitatem relatae.

Conſtr. Parametro a deſcribatur parabola AM, in qua ſit abſciſſa quaecunque $AN = u$, erit ordinata $NM = x$, et $x^2 = au$. Eſt vero $y = u + m$; quare producta NA fiat $AB = m$, erit $BN = u + m = y$, et $BD = x$. Aequationem rite eſſe conſtructam, ſeu valores x et y legitime determinatos patebit, ſi valores inuentos ſubſtituendo, ex ipſa parabola conſtructa reſtituatur aequatio propoſita. Sit ergo $BN = y$, $BD = NM = x$, erit $AN = y - m$, et ex natura parabolae $a \times AN = NM^2$, ſeu $ay - am = x^2$, ac pro am reponendo b^2 erit $x^2 - ay + b^2 = 0$, quae fuit aequatio propoſita. Fig. 132.

Facile adparet alterum parabolae ramum AQ eſſe locum pro radice negatiua $-x$.

II. Sit conſtruenda aequatio $y^2 - ax - ab = 0$, erit $y^2 = a(x + b)$. Fiat ergo $x + b = u$, erit $y^2 = au$, quae eſt aequatio ad parabolam concauam.

Conſtr. Parametro a deſcribatur parabola QAM, et ſub angulo dato capiantur quaeuis coordinatae AN et NM, ſitque $AN = u$, erit $NM = y$, et $y^2 = au$. Eſt autem $x = u - b$: quare fiat $AH = b$, erit $HN = x$, $NM = y$, abſciſſae verſus N poſitiuae, verſus A negatiuae; ac coordinatae ex vna parte poſitiuae, ac altera negatiuae. Patet rurſus locum rite eſſe conſtructum: ſi enim ſit $NM = y$, $HN = x$, erit $AN = b + x$; atqui ex natura parabolae $a \times AN = NM^2$, ſeu $ab + ax = y^2$: ergo $y^2 - ax - ab = 0$, quae fuit aequatio propoſita.

Si fuiſſet $y^2 - ax + ab = 0$, ſeu $y^2 = a(x - b)$, poni debuiſſet $x - b = u$, vnde $x = u + b$, adeoque in recta AN producta ſumenda fuiſſet $AB = b$, et hinc origo abſciſſarum tranſiiſſet ad B, et fuiſſet $BN = x$, $NM = y$.

III. Sit conſtruenda aequatio $xy + ax + ay - a^2 = 0$, erit $xy + ax = x(y + a) = a^2 - ay$. Fiat $y + a = u$, erit $y = u - a$; quo valore ſubſtituto erit $ux - ax + ax = a^2 - au + a^2$, ſeu $ux + au = u(x + a) = 2a^2$. Fiat rurſus $x + a = q$, erit $qu = 2a^2$, quae eſt aequatio ad hyperbolam intra aſymptotos.

Fig. 133. *Conſtr.* Sub angulo dato coordinatarum ducantur rectae indefinitae AA et BB, intra quas tanquam aſymptotos deſcribantur hyperbolae oppoſitae rectanguli $2a^2$. Sumatur deinde quaecunque abſciſſa $CD = q$, erit ordinata $DM = u$, et $qu = 2a^2$. Eſt vero $x = q - a$: fiat ergo $CF = a$, erit $FD = x$; et quia $y = u - a$, fiat $CN = a$, ducta NK ad BB parallela, erit $GH = FD = x$, $HM = y$. Vt adpareat locum rite eſſe conſtructum, ponamus $GH = x$, $HM = y$, erit $CD = a + x$, et $DM = a + y$; atqui ex natura hyperbolae $CD \times DM = 2a^2$: ergo $a^2 + ax + ay + xy = 2a^2$, vnde $xy + ax + ay - a^2 = 0$, quae eſt aequatio propoſita.

Si ordinata HM ſumatur inter puncta G et O, ſemper erit poſitiua: ſi ſumatur vltra O et ſit KL, erit negatiua. Si fuerit $q < a$, ſeu $CD < CF$, erit $x = q - a$, quantitas negatiua vſque ad N, reſpondebitque ei ordinata poſitiua. Si puncto D in C cadente euaneſcat q, erit $x = q - a = GN$, et $u = \frac{2a^2}{q} = \frac{2a^2}{0} = \infty$, adeoque etiam $y = u - a = \infty$, ſeu ordinata congruet cum aſymptoto NA. Si CD ſeu q ſumatur negatiue, et ſit $CE = NI$, erit $x = q - a = GI$ abſciſſa negatiua, reſpondebitque eidem ordinata pariter negatiua IR.

Si aequatio propoſita eſſet $xy - ax - ay - a^2$, ſeu $xy - ax = a^2 + ay$, fieri deberet $y - a = u$, foretque $ux - au$ ſeu $u(x - a) = 2a^2$: rurſus fieri deberet $x - a = q$, foretque $qu = 2a^2$. Quare adhibita ſuperiori conſtructione coordinatis q et u addenda eſſet quantitas a, vt habeantur aequationis propoſitae coordinatae x et y. Igitur a C verſus E ſumi deberet $CV = a$, item fieri $VT = a$, quo pacto abſciſſarum origo foret in T, eſſetque e. g. $TP = x$, $PM = y$.

Scholion. Si quantitates conſtantes in propoſita aequatione tales non fuerint, vt dictis ſubſtitutionibus locus eſſe poſſit, tales effici debent adhibita transformatione, vti fecimus ſupra in exemplo primo. E. g. ſi proponeretur aequatio $y^2 - a^2 + bx = 0$, fieri deberet $a^2 = bc$, inueniendo nempe ad b et a tertiam proportionalem c, fieretque $y^2 - bc + bx = 0$, ſeu $y^2 = b(c - x)$, vbi iam poni poſſet $c - x = u$, et haberetur $y^2 = bu$. Si eſſet $y^2 = \frac{ab^2}{m} + cx$, fieri deberet $b^2 = cn$, effetque $y^2 = \frac{acn}{m} + cx = c\left(\frac{an}{m} + x\right)$, vbi iam poni poſſet $\frac{an}{m} + x = u$, et obueniret $y^2 = cu$. Si eſſet $y^2 = \frac{a^2x - b^2x + m^3}{a + b}$, fieri deberet $a^2 - b^2 = c^2$, et $m^3 = c^2n$, effetque $y^2 = \frac{c^2x + c^2n}{a + b} = c^2\left(\frac{x + n}{a + b}\right)$, vbi iam poni poſſet $\frac{x + n}{a + b} = u$, et obueniret $y^2 = c^2u$, et ſic porro.

342. *Probl. Conſtruere aequationes ſecundae claſſis.*

Reſol. Ponantur in vno aequationis membro omnes termini eandem coordinatam continentes, ita vt quadratum eiuſdem ſit poſitiuum, et ab omni coefficiente liberum: termini reliqui tranſponantur ad membrum alterum. Deinde, ſi opus ſit, compleatur quadratum, ac radix extracta ponatur aequalis nouae cuidam indeterminatae, repetendo eandem operationem etiam in altero membro, ſi neceſſe ſit. Hoc pacto obtinebitur aequatio ſimpliciſſi-

ma, vel ad classem primam pertinens. Rem exemplis iterum declarabimus.

Exempla.

I. Sit construenda aequatio $y^2 - ay - bx - c^2 = 0$; ordinando eandem erit $y^2 - ay = bx + c^2$, et complendo quadratum $y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2 = bx + c^2 + \frac{1}{4}a^2$. Fiat radix primi membri $y - \frac{1}{2}a = u$, erit $u^2 = bx + c^2 + \frac{1}{4}a^2$, quae aequatio iam ad classem primam pertinet. Quare ad b et $\frac{1}{2}a$ tertiam proportionalem m inueniendo fiat $\frac{1}{4}a^2 = bm$, et $c^2 = bn$, erit $u^2 = bx + bn + bm = b(x + n + m)$. Fiat denique $x + n + m = z$, erit $u^2 = bz$, quae aequatio est ad parabolam.

Fig. 134. *Constr.* Parametro b describatur parabola NAM, in qua sumta abscissa quauis $AP = z$, erit ordinata $PM = u$, et $u^2 = bz$. Est autem $x = z - n - m$; quare fiat $AB = n + m$, erit $BP = x$; et quia $y = u + \frac{1}{2}a$, fiat $AR = \frac{1}{2}a$ parallela ad PM, et ex R ducatur RQ parallela ad AP, ac ex B recta BD parallela ad AR occurrens rectae RQ alicubi in D, erit $DQ = x$, et eius ordinata $QM = y$. Quia vero superius extracta radix non solum est $y - \frac{1}{2}a = u$, sed etiam $\frac{1}{2}a - y = u$, erit $-y = u - \frac{1}{2}a = PM - QP = PN - QP = QN$.

Vtramque radicem rite esse inuentam patet: sit enim $DQ = BP = x$, $QM = y$, et $QN = -y$, erit $AP = x + n + m$, $PM = QM - QP = y - \frac{1}{2}a$, et $PN = QP + QN = \frac{1}{2}a - y$: est autem $b \times AP = PM^2 = PN^2$: ergo $bx + bn + bm = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$, seu cum sit $bn = c^2$, $bm = \frac{1}{4}a^2$, erit $bx + c^2 + \frac{1}{4}a^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$, vnde $y^2 - ay - bx - c^2 = 0$, quae est aequatio proposita.

II. Sit construenda aequatio $y^2 + \frac{a^2x^2}{a^2-b^2} - \frac{2a^2cy}{a^2-b^2} + \frac{a^2c^2}{a^2-b^2} = 0$, erit ordinando $y^2 - \frac{2a^2cy}{a^2-b^2} = \frac{-a^2c^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2-b^2}$, et complendo quadratum

tum $y^2 - \frac{2a^2cy}{a^2-b^2} + \frac{a^4c^2}{(a^2-b^2)^2} = \frac{a^4c^2}{(a^2-b^2)^2} - \frac{a^2c^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2} - \frac{a^2x^2}{a^2-b^2}$.

Fiat iam radix primi membri $y - \frac{a^2c}{a^2-b^2} = q$, erit $q^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2} - \frac{a^2x^2}{a^2-b^2}$, seu $\frac{a^2x^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2} - q^2$, quae aequatio est ad ellipsim abscissis a centro computatis, cuius axis maior est $= 2\sqrt{\left(\frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2}\right)} = \frac{2abc}{a^2-b^2}$ (268), adeoque parameter eiusdem $= \frac{2bc}{a}$ (271).

Constr. Fiat recta $AC = \frac{a^2c}{a^2-b^2}$, factisque $CH = CG = \frac{abc}{a^2-b^2}$, axe transuerso GH parametro $\frac{2bc}{a}$ describatur ellipsis, ducaturque recta indefinita AB ad AC perpendicularis, in qua sumta quauis abscissa $AP = x$, erit eius ordinata $PM = y$. Fig. 135. Est enim formula ellipseos $\frac{2a}{p}y^2 = a^2 - x^2$, atqui hic $2a = \frac{2abc}{a^2-b^2}$, $p = \frac{2bc}{a}$, y seu $NM = AP$ est $= x$, et $x = CN = AC - AN = \frac{a^2c}{a^2-b^2} - y$: ergo valoribus hisce in formula illa substitutis erit $\frac{a^2x^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2} - \frac{a^4c^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{2a^2cy}{a^2-b^2} - y^2$, id est: $y^2 + \frac{a^2x^2}{a^2-b^2} - \frac{2a^2cy}{a^2-b^2} + \frac{a^4c^2-a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2} = 0$, seu postremam fractionem per $a^2 - b^2$ diuidendo erit $y^2 + \frac{a^2x^2}{a^2-b^2} - \frac{2a^2cy}{a^2-b^2} + \frac{a^2c^2}{a^2-b^2} = 0$, quae est aequatio proposita.

III. Sit construenda aequatio $x^2 + 2ax - ay - by = 0$, erit ordinando $x^2 + 2ax = ay + by$, et quadratum complendo $x^2 + 2ax + a^2 = a^2 + ay + by$. Fiat primi membri radix $x + a = u$, erit $u^2 = a^2 + ay + by$, quae aequatio iam pertinet ad classem primam. Fiat ergo $a^2 = mn$, $a + b = m$, erit $u^2 = mn + my = m(n + y)$. Fiat denique $n + y = q$, erit $u^2 = mq$, quae aequatio est ad parabolam.

Constr. Parametro $m = a + b$ describatur parabola QAM, Fig. 136. in qua assumta quauis abscissa $AP = q$, erit ordinata $PM = u$, et

$u^2 = qm$. Eſt autem $y = q - n = q - \frac{a^2}{a+b}$; fiat ergo $AD = n = \frac{a^2}{a+b}$, erit $DP = y$: et quia $x = u - a$, ducatur ex D recta $DN = a$ ad PM parallela, haec in N terminabitur in parabola: ſi enim in aequatione parabolae $u^2 = mq$ pro abſciſſa q ponatur $AD = \frac{a^2}{a+b} = \frac{a^2}{m}$, erit $u^2 = a^2$, ſeu $u = a = DN$. Igitur per punctum N ducatur TO ad AP parallela, erit $NO = y$, $OM = x$, et $OQ = -x$. Si vero abſciſſa y ſumatur vltra N, et ſit e. g. $NR = -y$, erunt ambae ordinatae RF et RH negatiuae, et $= -x$.

Conſtructionem pro ſingulis radicibus legitimam eſſe facile oſtenditur. Nam 1) ſi $OM = x$, et $NO = y$, erit $PM = a + x$, et $AP = AD + DP = AD + NO = \frac{a^2}{a+b} + y$; atqui $PM^2 = m \times AP$: ergo $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + ay + by$, ſeu $x^2 + 2ax - ay - by = 0$, quae eſt aequatio propoſita. 2) Si $NO = y$, et $OQ = -x$, erit $PQ = -x - a$, $PQ^2 = x^2 + 2ax + a^2 = m \times AP = (a+b) \times \left(\frac{a^2}{a+b} + y\right) = a^2 + ay + by$, et hinc rurſus $x^2 + 2ax - ay - by = 0$. 3) Si $NR = -y$, $RF = -x$, erit $AG = AD - NR = \frac{a^2}{a+b} + y$, et $GF = DN - FR = a + x$; eſt autem $GF^2 = m \times AG = (a+b) \times \left(\frac{a^2}{a+b} + y\right)$: ergo $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + ay + by$, et hinc vt ſupra $x^2 + 2ax - ay - by = 0$. 4) Si denique $NR = -y$, et $RH = -x$, erit $GH = -x - a$, $GH^2 = x^2 + 2ax + a^2 = m \times AG = (a+b) \times \left(\frac{a^2}{a+b} + y\right) = a^2 + ay + by$, vnde rurſus $x^2 + 2ax - ay - by = 0$.

IV. Sit conſtruenda aequatio $x^2 + 2bx - y^2 + ay = 0$, erit ordinando $x^2 + 2bx = y^2 - ay$, et in membro primo quadratum complendo $x^2 + 2bx + b^2 = y^2 - ay + b^2$. Fiat radix primi mem-

bri $x+b=u$, erit $u^2=y^2-ay+b^2$, ſeu $u^2-b^2=y^2-ay$, & complendo rurſus quadratum in ſecundo membro $u^2-b^2+\frac{1}{4}a^2=y^2-ay+\frac{1}{4}a^2$. Fiat ſecundi membri radix $y-\frac{1}{2}a=q$, erit $u^2-b^2+\frac{1}{4}a^2=q^2$; et poſito $b^2>a^2$ ſi fiat $b^2-\frac{1}{4}a^2=m^2$, erit $u^2-m^2=q^2$, quae aequatio eſt ad hyperbolam aequilateram diametris $2m$ deſcriptam abſciſſis a centro computatis (268).

Conſtr. Capiatur in recta quapiam indefinita pars $AB=2m=2\sqrt{(b^2-\frac{1}{4}a^2)}$, et diuidatur bifariam in C, deſcribanturque hyperbolae aequilaterae, ac ſumatur abſciſſa quaeuis $CP=u$, erit eius ordinata $PM=q$, et $u^2-m^2=q^2$. Eſt autem $x=u-b$; fiat ergo $CD=b$, erit $DP=x$; et quia $y=q+\frac{1}{2}a$, ducatur $DQ=\frac{1}{2}a$ ordinatae PM parallela, ea terminabitur in hyperbola; nam ſi in aequatione hyperbolae $u^2-m^2=q^2$ pro u ponatur $CD=b$, erit $b^2-m^2=q^2$, ſeu $b^2-b^2+\frac{1}{4}a^2=q^2$, vnde $q=\frac{1}{2}a=DQ$. Quare ſi per Q ducatur recta indefinita FR parallela ad AB, erit $QR=x$, $RM=y$, $RN=-y$. Fig. 137.

Locum rite conſtructum eſſe patet; ſi enim $QR=DP=x$, erit $CP=b+x$; et ſi $RM=y$, erit $PM=y-\frac{1}{2}a$; aut ſi $RN=-y$, erit $PN=\frac{1}{2}a-y$: eſt vero in hyperbola aequilatera $CP^2-CB^2=PM^2=PN^2$, ſeu $b^2+2bx+x^2-b^2+\frac{1}{4}a^2=y^2-ay+\frac{1}{4}a^2$, et hinc $x^2+2bx-y^2+ay=0$, quae eſt aequatio propoſita.

Si abſciſſa RQ ſumatur negatiue verſus E, fitque e. g. $QT=-x$, non tamen ſit maior, quam DB, erunt ordinatae TO et $TS=y$: erit enim $CZ=CD-QT=b+x$, et ſi $TO=y$, erit $ZO=DQ-TO=\frac{1}{2}a-y$; aut ſi $TS=y$, erit $ZS=TS-TZ=y-\frac{1}{2}a$: eſt vero $CZ^2-CB^2=ZO^2=ZS^2$, ſeu $b^2+2bx+x^2-b^2+\frac{1}{4}a^2=y^2-ay+\frac{1}{4}a^2$, vnde $x^2+2bx-y^2+ay=0$, vt ſupra.

Si abſciſſa negatiua QT fiat $=DB$, fiet $TO=TS$, ſeu ambae radices poſitiuae erunt aequales. Si fiat $QT>DB$ ſed

$<DA$, ordinatae euadent imaginariae. Si fiat abſciſſa $QE>DA$ ſed $<DH$, ordinatae EV et $EX=y$ erunt poſitiuae. Si fiat abſciſſa $QF>DH$, erit $FK=y$, $FG=-y$. In omnibus his caſibus locum rite eſſe conſtructum patet, vt ante.

343. *Probl. Conſtruere aequationes tertiae claſſis.*

Reſol. Ponatur in vno aequationis membro quadratum vnius coordinatae cum terminis rectangulum vtriuſque continentibus, et procedatur vt ſupra. Ne vero conſtructio euadat operoſa, in introducenda noua indeterminata haec lex obſeruanda erit. Si completo iam in vna parte quadrato in parte altera vel non adſit rectangulum e conſtantibus in illam coordinatam, iuxta quam aequatio ordinata eſt; vel ſi adſit, illa ipſa coordinata eliminari debeat, radix primi membri ſimpliciter ponatur aequalis nouae indeterminatae, vt in problemate praecedente: ſi vero ex altera parte vel non adſit rectangulum e conſtantibus in alteram coordinatam; vel ſi adſit, illa ipſa coordinata debeat eliminari, radix primi membri ponatur aequalis nouae indeterminatae ductae in dimidium coefficientem conſtantem, quem habet terminus ſecundus in membro primo.

E. g. Si in aequatione $x^2+\frac{2bxy}{a}+\frac{b^2}{a^2}y^2=my-nx$, vbi iam quadratum in membro primo completum eſt, et aequatio ſecundum coordinatam x ordinata eſt, ſi in membro ſecundo vel non adeſſet ordinata x, vel illa ipſa deberet, ſi adſit, eliminari, ita vt eius valor obtineatur per nouam indeterminatam, ac per y, et conſtantes, poni deberet radix primi membri $x+\frac{by}{a}=u$, vt ſupra. Si vero coordinata altera y vel non adeſſet in ſecundo membro, vel ſi adſit, illa ipſa deberet eliminari, deberet poni $x+\frac{by}{a}=\frac{bu}{a}$. Sed haec exemplis ſequentibus fient clariora.

Exempla.

I. Sit conſtruenda aequatio $y^2+\frac{2bxy}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}=cx$. Cum in membro primo quadratum ſit completum, et coordinata y, iuxta quam aequatio ordinata eſt, et quae eliminari debet, non adſit in ſecundo membro, fiat primi membri radix $y+\frac{bx}{a}=u$, erit $u^2=cx$, quae aequatio eſt ad parabolam.

Conſtr. Ducta recta indefinita AF capiatur $AE=a$, fiatque angulus AEB aequalis ſupplemento, ſeu contiguo anguli coordinatarum vi problematis dati, vel aſſumti, et ſumatur $EB=b$, innoteſcet in triangulo AEB etiam latus tertium $AB=m$. Ducatur iam quaecunque recta indefinita RN ad BE parallela, ſitque $AQ=x$, erit $OQ=\frac{bx}{a}$. Si porro pro aequatione reducta $u^2=cx$ parametro c deſcriberetur parabola, in ea ſi ON eſſet $=u$, non poſſet AO eſſe $=x$ reſpondens in aequatione propoſita ordinatae y; et ſi AQ eſſet $=x$, non poſſet QN eſſe $=u$: quare parabolae deſcribendae parameter hoc pacto inuenitur. Cum ſit $AO=\frac{mx}{a}$, ſi parametro c deſcriberetur parabola, in qua ON eſſet $=u$, ea daret aequationem $\frac{cmx}{a}=u^2$, quae eadem erit cum noſtra reducta $cx=u^2$, ſi in ea pro parametro c ponatur $\frac{ac}{m}$, ſeu quarta proportionalis ad AB, AE, et ad parametrum aequationis reductae. Fig. 138

Igitur parametro $\frac{ac}{m}$, ordinatis ad recta BE parallelis deſcribatur parabola TAN, ac ſuper rectam AF ſumatur abſciſſa quaecunque $AQ=x$, erit ordinata $QN=y$, $QR=-y$. Si enim $QN=y$, erit $ON=OQ+QN=\frac{bx}{a}+y$; et ſi $QR=-y$, erit

$OR = QR - OQ = -y - \frac{bx}{a}$, atqui $ON^2 = OR^2 = AO \times \frac{ac}{m} = \frac{mx}{a} \times \frac{ac}{m}$: ergo $y^2 + \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = cx$, quae est aequatio proposita.

Scholion. Quod hic de parabolae construendae parametro diximus, semper obtinet, dum coordinatarum angulus vi problematis datur. Idem autem est artificium etiam in ellipsi et hyperbola respectu diametrorum, ac parametrorum, hoc vno discrimine, quod in his diameter illa, ad quam pertinet triangulum ABE, seu ad quam ordinatae adplicantur, sit quarta proportionalis ad AE, ad AB, et ad diametrum aequationis reductae. Quodsi triangulo illo ABE ad diametrum transuersam pertinente detur aequatio respectu parametri, erit ea diameter quarta proportionalis ad AB, ad AE, et ad parametrum aequationis reductae: sin autem in hoc casu triangulum ABE ad coniugatam diametrum pertineat, erit haec diameter tertia proportionalis ad parametrum aequationis reductae, et ad AB, vt ex inferioribus adparebit.

II. Sit construenda aequatio $y^2 + \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = bx - 2cy - c^2$. Cum in membro primo quadratum iam completum sit, et in secundo membro adsit quidem coordinata y, iuxta quam aequatio ordinata est, sed illa ipsa sit substitutione eliminanda, fiat primi membri radix $y + \frac{bx}{a} = u$, erit $y = u - \frac{bx}{a}$, et hinc $u^2 = bx - c^2 - 2cu + \frac{2bcx}{a}$, seu $u^2 + 2cu + c^2 = bx + \frac{2bcx}{a} = \frac{abx + 2bcx}{a}$. Fiat rursus primi membri radix $u + c = q$, erit $q^2 = \frac{(ab + 2bc)}{a} x$, quae aequatio est ad parabolam.

Fig. 139. *Constr.* Super recta quadam indefinita AF construatur triangulum ABE, in quo angulus E sit supplementum anguli coordinatarum, AE sit $= a$, $EB = b$, innotescet etiam $AB = m$. Ducatur ad EB parallela $AD = c$, et per D recta indefinita DG pa-

rallela ad AF. Deinde ad AB, ad AE, et ad parametrum aequationis reductae $\frac{ab+2bc}{a}$ quaeratur quarta proportionalis $\frac{ab+2bc}{m}$, ac ea tanquam parametro vertice D circa diametrum DG, deſcribatur parabola TDM, ac in recta AH deſumatur quaecunque abſciſſa AQ$=x$, erit ordinata QM$=y$, et QT$=-y$. Si enim AQ$=x$, erit AO$=$DG$=\frac{mx}{a}$, et OQ$=\frac{bx}{a}$; et ſi QM$=y$, erit GM$=$GO$+$OQ$+$QM$=c+\frac{bx}{a}+y$, vel ſi QT$=-y$, erit GT$=$QT$-$OQ$-$GO$=-q-\frac{bx}{a}-c$; atqui ex natura parabolae $\frac{(ab+2bc)}{ma}\times$DG$=GM^2=$GT^2: ergo $bx+\frac{2bcx}{a}=c^2+\frac{2bcx}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}+2cy+\frac{2bxy}{a}+y^2$, vnde $y^2+\frac{2bxy}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}=bx-2cy-c^2$, quae eſt aequatio propoſita.

Si puncto Q vltra L verſus A cadente abſciſſa ſit e. g. AP, erunt ordinatae PN et PC$=-y$. Si enim AP ſit $=x$, erit PN$=\frac{bx}{a}$, et ſi ſit PN$=-y$, erit RN$=$RP$-$PN$=c+\frac{bx}{a}+y$, et ſi PC$=-y$, erit RC$=$PC$-$RP$=-y-c-\frac{bx}{a}$: ergo $\frac{(ab+2bc)}{m}\times$DR$=$RN$^2=$RC^2, ſeu $bx+\frac{2bcx}{a}=y^2+\frac{2bxy}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}+2cy+\frac{2bcx}{a}+c^2$, id eſt $y^2+\frac{2bxy}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}=bx-2cy-c^2$, vt ſupra. Eſt ergo arcus indefinitus LM locus radicum poſitiuarum, arcus LDT negatiuarum.

III. Sit conſtruenda aequatio $x^2+\frac{2bxy}{a}+\frac{b^2y^2}{a^2}=cx+ch$. Cum in primo membro quadratum iam completum ſit, et in ſecundo deſit coordinata y, iuxta quam aequatio ordinata non eſt, et ea ipſa eliminari debeat, fiat membri primi radix $x+\frac{by}{a}=\frac{bu}{a}$, erit

$\frac{b^2u^2}{a^2} = cx + ch = c(x+h)$. Fiat $x+h=q$, erit $\frac{b^2u^2}{a^2} = cq$, seu $u^2 = \frac{a^2cq}{b^2}$, quae aequatio est ad parabolam.

Fig. 140. *Constr.* Super recta indefinita AF construatur triangulum consuetum AEB, in quo angulus E sit supplementum anguli dati coordinatarum, AE sit $=b$, BE$=a$, innotescet AB$=m$. Fiat AK$=h$, ducaturque recta KL ad EB parallela, item ex L recta indefinita LT parallela ad AK. Porro ad AB, ad AE, et ad parametrum aequationis reductae $\frac{a^2c}{b^2}$ quaeratur quarta proportionalis $\frac{a^2c}{bm}$, qua tanquam parametro vertice A circa diametrum AF describatur parabola NAM. Si iam in recta LT assumatur quaeuis abscissa LQ$=x$, erit ordinata QM$=y$, et QN$=-y$. Si enim sit LQ$=$KP$=x$, erit AP$=$AK$+$KP$=h+x$, et AE$:$AB$=$AP$:$AR, seu $b:m=h+x:$AR$=\frac{hm+mx}{b}$: item ob triangula ABE et LRQ similia AE$:$BE$=$LQ$:$RQ, seu $b:a=x:$RQ$=\frac{ax}{b}$; hinc si QM$=y$, erit RM$=$RQ$+$QM$=\frac{ax}{b}+y$; vel si QN$=-y$, erit RN$=$QN$-$RQ$=-y-\frac{ax}{b}$: est vero $\frac{a^2c}{bm}\times$ AR$=$RM$^2=$RN^2, seu $\frac{a^2ch+a^2cx}{b^2} = \frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{2axy}{b} + y^2$, et hinc multiplicando omnia per b^2, et diuidendo per a^2 erit $x^2 + \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2y^2}{a^2} = cx + ch$, quae est aequatio proposita.

IV. Sit construenda aequatio $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{cx^2}{a} = h^2$, erit ordinando $y^2 - \frac{2bxy}{a} = h^2 - \frac{cx^2}{a}$, et complendo quadratum $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = h^2 - \frac{cx^2}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$, vbi cum in secundo membro desit coordinata y, iuxta quam aequatio ordinata est, et quae eliminari de-

debet, fiat primi membri radix $y - \frac{bx}{a} = u$, erit $u^2 = h^2 - \frac{cx^2}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = h^2 - (ac + b^2)\frac{x^2}{a^2}$. Fiat $b^2 - ac = m^2$, erit $u^2 = h^2 + \frac{m^2x^2}{a^2}$, seu $u^2 - h^2 = \frac{m^2x^2}{a^2}$, quae aequatio est ad hyperbolam abscissis a centro computatis.

Constr. Super recta indefinita AF constituatur solitum triangulum AEB, in quo angulus B sit angulus datus coordinatarum, $AB = a$, $BE = b$, innotescet $AE = n$. Per A ducatur recta indefinita QR parallela ad BE, et fiat $AD = AP = h$, erit DP diameter transuersa: diameter vero coniugata aequationis reductae est $= \frac{2ah}{m}$ (269); quare si ad AB, ad AE, et ad $\frac{2ah}{m}$ quaeratur quarta proportionalis $\frac{2hn}{m}$, erit ea diameter coniugata hyperbolarum describendarum sumenda in recta AN vtrinque producta; hisce diametris centro A per vertices D et P describantur hyperbolae oppositae, ac super recta indefinita AF sumatur quaecunque abscissa $AF = x$, erit ordinata $FM = y$ et $FT = -y$. Fig. 141.

Si enim fit $AF = x$, erit $FN = \frac{bx}{a}$; et si $FM = y$, erit $NM = AG = y - \frac{bx}{a}$, vel si $FT = -y$, erit $NT = AH = \frac{bx}{a} - y$: erit item $AN = GM = HT = \frac{nx}{a}$. Est autem hyperbolae formula $\frac{a^2}{b^2}y^2 = x^2 - a^2$ (268): ergo pro a ponendo h, pro b ponendo $\frac{hn}{m}$, pro y ponendo $GM = \frac{nx}{a}$, et pro x ponendo $AG = y - \frac{bx}{a}$, erit $\frac{m^2}{n^2} \times \frac{n^2x^2}{a^2} = y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} - h^2$, seu $\frac{m^2x^2}{a^2} = y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} - h^2$, ac pro m^2 restituendo valorem $b^2 - ac$ erit $\frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{cx^2}{a} = y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} - h^2$, et hinc $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{cx^2}{a} = h^2$, quae est aequatio pro-

posita. Eodem modo restituitur aequatio proposita, si pro AG adhibeatur AH=NT.

V. Sit construenda aequatio $y^2+\frac{bxy}{a}+x^2+cy+dx-ag=0$, erit ordinando $y^2+\frac{bxy}{a}=-x^2-dx+ag-cy$, et complendo quadratum $y^2+\frac{bxy}{a}+\frac{b^2x^2}{4a^2}=\frac{b^2x^2}{4a^2}-x^2-dx+ag-cy$, vbi cum in secundo membro adsit coordinata y, iuxta quam aequatio ordinata est, et ea ipsa debeat substitutione eliminari, fiat primi membri radix $y+\frac{bx}{2a}=u$, erit $y=u-\frac{bx}{2a}$ adeoque $u^2=\frac{b^2x^2-4a^2x^2}{4a^2}+\frac{bcx-2adx}{2a}-cu+ag$. Ponamus $4a^2>b^2$, ac breuitatis caussa $\frac{b^2-4a^2}{4a^2}=-\frac{m}{n}$, ac $\frac{bc-2ad}{2a}=h$, erit $u^2=-\frac{mx^2}{n}+hx-cu+ag$, et rursus ordinando $u^2+cu=-\frac{mx^2}{n}+hx+ag$, tum quadratum complendo $u^2+cu+\frac{1}{4}c^2=\frac{1}{4}c^2-\frac{mx^2}{n}+hx+ag$. Fiat rursus primi membri radix $u+\frac{1}{2}c=p$, erit $p^2=\frac{1}{4}c^2-\frac{mx^2}{n}+hx+ag$, seu diuidendo omnia per $-\frac{m}{n}$ erit $-\frac{np^2}{m}=(-\frac{1}{4}c^2-ag)\frac{n}{m}+x^2-\frac{nhx}{m}$, ac iterum respectu x ordinando, et quadratum complendo erit $-\frac{np^2}{m}+(\frac{1}{4}c^2+ag)\frac{n}{m}+\frac{n^2h^2}{4m^2}=x^2-\frac{nhx}{m}+\frac{n^2h^2}{4m^2}$, vbi si membri secundi radix $x-\frac{nh}{2m}$ fiat $=q$, et $(\frac{1}{4}c^2+ag)\times\frac{n}{m}+\frac{n^2h^2}{4m^2}=e^2$, erit $\frac{np^2}{m}=e^2-q^2$, quae aequatio est ad ellipsim absciſſis a centro computatis.

Fig. 142. *Constr.* Super recta indefinita AF erigatur consuetum triangulum ABE, in quo angulus E sit supplementum anguli dati coordinatarum, AE=2a, BE=b, innotescet etiam AB=f. In recta AE producta fiat $AC=\frac{hn}{2m}$, et ex C ducatur indefinita CQ

ad BE parallela, fiatque $SQ=\frac{1}{2}c$, et per Q ducatur indefinita GH ad AB parallela. Deinde ad AE, ad AB, et ad diametrum tranſuerſam aequationis $2e$ inueniatur quarta proportionalis $\frac{ef}{a}$, cui fiat aequalis GH, erit ea diameter tranſuerſa ellipſeos deſcribendae, cuius parameter hoc pacto inuenitur. Quaeratur aequationis reductae diameter coniugata inferendo $n:m=e^2:\frac{me^2}{n}$, erit $2\sqrt{\frac{me^2}{n}}$ diameter coniugata (269): quaeratur deinde eiuſdem parameter (quae eſt tertia proportionalis ad diametrum tranſuerſam, et coniugatam) dicendo $2e:2\sqrt{\frac{me^2}{n}}=2\sqrt{\frac{me^2}{n}}:\frac{2me}{n}$, quae eſt parameter aequationis reductae. Denique iuxta praecedens ſcholion quaeratur quarta proportionalis ad AB, AE, $\frac{2me}{n}$, erit $\frac{4aem}{fn}$ parameter ellipſeos centro Q deſcribendae, in qua ſi ſuper AF capiatur quaecunque abſciſſa $AD=x$, erit ordinata $DM=y$, et $DN=-y$.

Si enim AD fit $=x$, erit $AT=\frac{fx}{2a}$, $AS=\frac{hnf}{4am}$, adeoque $ST=QP=\frac{fx}{2a}-\frac{hnf}{4am}$; item ſi $DM=y$, cum ſit $DT=\frac{bx}{2a}$, erit $PM=DM+DT+TP=y+\frac{bx}{2a}+\frac{1}{2}c$; et ſi $DN=-y$, erit $PN=DN-DT-TP=-y-\frac{bx}{2a}-\frac{1}{2}c$: quare ſi in formula ellipſeos $\frac{2a}{p}y^2=a^2-x^2$ (268) pro y ponatur valor PM vel PN, pro x valor QP, pro a ſemidiameter $\frac{ef}{2a}$, pro p parameter $\frac{4aem}{nf}$, ac denique valores m, n, h, e reſtituantur, calculo ſatis operoſo reſtituetur aequatio ad conſtruendum propoſita.

344. *Probl. Conſtruere loca geometrica ſecundi gradus ope formularum generalium.*

Reſol. E criteriis ſupra allatis (293) diſpiciatur, ad quamnam ſectionis conicae ſpeciem locus conſtruendus pertineat (338): deinde conferatur cum aequatione generali eiuſdem ſectionis conicae (272 et ſequ.) coaequando vtriuſque formulae terminos correſpondentes: eruentur hoc pacto valores coefficientium, et hinc innoteſcent elementa ad conſtructionem neceſſaria, quibus habitis inſtituatur conſtructio ad eum fere modum, quo formulae illae generales conſtructae ſunt, quem in finem exempla complura ſuppeditamus.

Exempla.

I. Sit conſtruenda aequatio $y^2 - ay - bx - c^2 = 0$. Cum in ea defit rectangulum coordinatarum xy, et vnicum adſit coordinatae quadratum y^2, patet locum eſſe ad parabolam concauam, comparandum proinde cum prima hac formula generali ad parabolam (272).

$$y^2 - \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}x^2 - 2ry + \left.\begin{matrix} \frac{2nr}{m} \\ -\frac{ep}{m} \end{matrix}\right\}x + r^2 = 0 \left.\begin{matrix} \\ \\ +sp \end{matrix}\right\}$$

Inſtituta ergo comparatione, 1) Cum in propoſita aequatione defit rectangulum xy, erit $-\frac{2n}{m} = 0$, ſeu $-2n = 0$: quare in Fig. 65. euaneſcente n, ſeu BE, fit HB = HE, ſeu $m = e$. 2) Conferendo terminos y continentes erit $-2r = -a$, ſeu $r = \frac{1}{2}a$. 3) Conferendo terminos x continentes erit $-\frac{ep}{m} = -b$ ſeu ob $e = m$, erit $p = b$. 4) Denique conferendo terminos cognitos erit $r^2 + sp = -c^2$, ſeu cum fuerit $r = \frac{1}{2}a$, $p = b$, erit $\frac{1}{4}a^2 + bs = -c^2$, vnde $s = -\frac{\frac{1}{4}a^2 - c^2}{b}$.

Fig. 143. Inuentis hiſce elementis ad imitationem Figurae 65 inſtituenda erit conſtructio. Cum igitur ſit $p = b$, parametro b circa

axem AP deſcribatur parabola MAT; quia vero valor s, qui in Fig. 65 eſt AC, hic eſt negatiuus, et $=-\frac{\frac{1}{4}a^2-c^2}{b}$, fiat in partem contrariam AR huic aequalis, punctum R hic reſpondebit puncto C figurae 65. Rurſus quia $r=\frac{1}{2}a$, fiat $RN=AB=\frac{1}{2}a$, reſpondebit haec rectae CH in Fig. 65, adeoque punctum N puncto H, quod proinde erit origo abſciſſarum, ac ducta recta indefinita BNQ, ſi in ea ſumatur quaeuis abſciſſa $NQ=x$, erit ordinata ad RN parallela $QM=y$, et $QT=-y$.

Si enim ſit $NQ=RP=x$, erit $AP=x+\frac{\frac{1}{4}a^2+c^2}{b}$; et ſi $QM=y$, erit $PM=QM-QP=y-\frac{1}{2}a$; vel ſi $QT=-y$, erit $PT=PQ+QT=\frac{1}{2}a-y$: eſt autem $AP\times b=PM^2=PT^2$: ergo $bx+\frac{1}{4}a^2+c^2=y^2-ay+\frac{1}{4}a^2$, vnde $y^2-ay-bx-c^2=0$, quae eſt aequatio propoſita.

II. Sit conſtruenda aequatio $y^2-\frac{axy}{b}+\frac{a^2x^2}{4b^2}-cx=0$. Cum in ea adſit rectangulum xy, et quadratum dimidii coefficientis eiuſdem $\frac{a^2}{4b^2}$ aequetur coefficienti quadrati x^2, patet locum rurſus eſſe ad parabolam concauam, cum eadem aequatione generali comparandum. Erit igitur 1) $-\frac{2s}{m}=-\frac{a}{b}$, ſeu $\frac{s}{m}=\frac{a}{2b}$. Cum vero in formula generali recta $HE=e$ ad libitum aſſumatur, poteſt talis aſſumi, vt AB ſeu m ſit $=2b$, erit ergo $n=a$. 2) $-2r=0$, ſeu $r=0$. 3) $-\frac{cp}{m}=-c$, ſeu ob $m=2b$, erit $p=\frac{2bc}{e}$. 4) $r^2+sp=0$, ſeu $s=-\frac{r^2}{p}=0$.

Igitur in recta indefinita AG ſumatur $AF=2b$, ſuper qua conſtruatur triangulum ARF, in quo ſit $RF=a$, angulus coordinatarum $=F$, reſpondebit hoc triangulum triangulo HBE

in Fig. 65, eritque $AR = e$. Deinde parametro $\frac{2bc}{e}$ circa diametrum AP (quae in Fig. 65 ob $r = HC = 0$, et ob $s = AC = 0$ respondebit diametro AD) describatur parabola MAT; si iam in recta AF sumatur quaeuis abscissa $AG = x$, erit ordinata $GM = y$, et $GT = -y$.

Est enim $AF : RF = AG : GP$, seu $2b : a = x : GP = \frac{ax}{2b}$, et $AF : AR = AG : AP$, seu $2b : e = x : AP = \frac{ex}{2b}$: quare si sit $GM = y$, erit $PM = y - \frac{ax}{2b}$; vel si sit $GT = -y$, erit $PT = GP + GT = \frac{ax}{2b} - y$; est vero $AP \times \frac{2bc}{e} = PM^2 = PT^2$, seu $cx = y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2}$, et hinc $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quae est aequatio proposita.

III. Sit construenda aequatio $x^2 - \frac{2adx}{b} - \frac{a^2cy}{b^2} + \frac{a^2d^2}{b^2} = 0$. Cum in ea desit rectangulum xy, et vnius tantum coordinatae quadratum x^2 adsit, patet aequationem esse ad parabolam conuexam, comparandam proinde cum formula eiusdem generali secunda (272).

$$x^2 - \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}y^2 - 2rx + \left.\begin{matrix} \frac{2nr}{m} \\ -\frac{sp}{m} \end{matrix}\right\} y + r^2 = 0 + sp$$

Instituta ergo comparatione erit 1) $-\frac{2n}{m} = 0$, seu $n = 0$, vnde in Fig. 66 euanescente recta BE fit $HB = HE$, seu $m = e$. 2) $-2r = -\frac{2ad}{b}$, seu $r = \frac{ad}{b}$. 3) $-\frac{sp}{m} = -\frac{a^2c}{b^2}$, seu ob $e = m$, erit $p = \frac{a^2c}{b^2}$. 4) Denique $r^2 + sp = \frac{a^2d^2}{b^2}$, seu pro r et p valores inuentos substituendo erit $\frac{a^2d^2}{b^2} + \frac{a^2cs}{b^2} = \frac{a^2d^2}{b^2}$, et hinc $\frac{a^2cs}{b^2} = 0$,

ſeu $s=0$, quare in Fig. 66 recta AC euaneſcit, et punctum C cadit in verticem A.

Ducta igitur recta indefinita HI reſpondente in Fig. 66. rectae HN, quae ob AC=0 tranſit per A, erigatur ad eam ſub angulo coordinatarum recta indefinita HK reſpondens in Fig. 66 rectae HE, cum qua coincidit HB, fiatque $HB=\frac{ad}{b}$ reſpondens in Fig. 66. rectae HC, ac ex B ducatur ad HK parallela indefinita BZ reſpondens in Fig. 66 diametro AD, ac circa eam tanquam diametrum parametro $\frac{a^2c}{b^2}$ deſcribatur parabola MBQ: ſi iam in recta HI verſus I ſumatur quaeuis abſciſſa HV vel $Hu=x$, erit ordinata VP vel $up=y$. Fig. 144.

Ductis enim per puncta P et p rectis PN et no parallelis ad HI, ſi ſit $HV=x$, erit $OP=HV-HB=x-\frac{ad}{b}$; vel ſi $Hu=x$, erit $op=HB-Hu=\frac{ad}{b}-x$: et ſi VP vel $up=y$, erit BO vel $Bo=y$; eſt autem $OP^2=OB\times\frac{a^2c}{b^2}$, vel $op^2=oB\times\frac{a^2c}{b^2}$ ſeu in vtroque caſu $x^2-\frac{2adx}{b}+\frac{a^2c^2}{b^2}=\frac{a^2cy}{b^2}$, ſeu $x^2-\frac{2adx}{b}-\frac{a^2cy}{b^2}+\frac{a^2d^2}{b^2}=0$, quae eſt aequatio propoſita.

Si vero ex altera parte puncti H ſumantur abſciſſae negatiuae, e. g. ſi ſit $HU=-x$, erit ordinata $US=y$: nam erit $BU=RS=BH+HU=\frac{ad}{b}-x$, et $BR=US=y$; atqui $RS^2=BR\times\frac{a^2c}{b^2}$: ergo $\frac{a^2d^2}{b^2}-\frac{2adx}{b}+x^2=\frac{a^2cy}{b^2}$, ſeu $x^2-\frac{2adx}{b}+\frac{a^2d^2}{b^2}-\frac{a^2cy}{b^2}=0$, vt ſupra. Quare arcus indefinitus TBQ eſt locus radicum x poſitiuarum, et arcus indefinitus TM negatiuarum.

IV. Sit conſtruenda aequatio $y^2+x^2-ay-bx=0$. Cum in ea deſit rectangulum xy, et quadrata coordinatarum y^2 et

x^2 careant coefficiente, patet locum esse ad circulum comparandum proinde cum aequatione eiusdem generali (275)

$$y^2 - \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2} - 2ry + \frac{2nr}{m} + r^2 = 0$$
$$+ \frac{e^2}{m^2} \qquad - \frac{2et}{m} \qquad - h^2$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + t^2$$

Instituta ergo comparatione erit 1) $-\frac{2n}{m} = 0$, seu $n = 0$, vnde in Fig. 67 recta BE euanescente HB congruit cum HE, fitque $m = e$. 2) $-2r = -a$, seu $r = \frac{1}{2}a$. 3) $-\frac{2et}{m} = -b$, seu ob $m = e$, erit $2t = b$, et $t = \frac{1}{2}b$. 4) $r^2 - h^2 + t^2 = 0$, vnde $r^2 + t^2 = h^2$, ac pro r et t valores iam inuentos substituendo erit $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = h^2$, et $h = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$.

Fig. 145. Ducta ergo recta indefinita QR respondente in Fig. 67 rectae CD, fiat $OD = \frac{1}{2}b$ respondens rectae FC, et perpendiculum $DA = \frac{1}{2}a$ respondens rectae CH in Fig 67, erit origo abscissarum in A respondente ibidem puncto H. Ducatur AO, quae erit $= \sqrt{(DA^2 + DO^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$, adeoque radius circuli describendi, quo descripto per A ducatur recta indefinita AB parallela ad QR respondens rectis HB et HE congruentibus in Fig. 67, in qua si sumatur abscissa quaecunque $AP = x$, erit ordinata $PM = y$, et $PN = -y$.

Si enim fit $AP = DF = x$, erit $OF = DF - DO = x - \frac{1}{2}b$; et si $PM = y$, erit $FM = PM - PF = y - \frac{1}{2}a$; vel si $PN = -y$, erit $FN = FP + PN = \frac{1}{2}a - y$: est autem $OM^2 = OF^2 + FM^2 = OF^2 + FN^2$, seu $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2 + x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$, vnde $y^2 + x^2 - ay - bx = 0$, quae est aequatio proposita.

Si abscissa sumatur negatiua ex altera parte, e.g. si fit $AP = -x$, erunt ordinatae PH et $Pm = y$, erit enim $Of = OD + AP$
$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}b - x$, et $fm = pm - pf = y - \frac{1}{2}a$, vel $fH = pf - pH = \frac{1}{2}a - y$; eſt autem $Om^2 = Of^2 + fm^2 = Of^2 + fH^2$, ſeu $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 - bx + x^2 + y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$, et hinc $y^2 + x^2 - ay - bx = 0$, vt ſupra. Eſt adeo arcus AQMRC locus radicum poſitiuarum, arcus ANC negatiuarum.

V. Sit conſtruenda aequatio $y^2 + \frac{a}{b}xy + \frac{d}{c}x^2 - f^2 = 0$, ſitque datus coordinatarum angulus, et $\frac{a}{2b} < \sqrt{\frac{d}{c}}$: patet locum eſſe ad ellipſim, comparandum proinde cum aequatione eiuſdem generali (278).

$$y^2 - \left.\begin{matrix} \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2} \\ + \frac{e^2p}{2hm^2} \end{matrix}\right\} x^2 - \left.\begin{matrix} 2ry + \frac{2nr}{m} \\ - \frac{2ept}{2hm} \end{matrix}\right\} x \begin{matrix} + r^2 = 0. \\ - \frac{k^2p}{2h} \\ + \frac{t^2p}{2h} \end{matrix}$$

Inſtituta ergo comparatione erit 1) $-\frac{2n}{m} = \frac{a}{b}$, adeoque ſi in formula generali recta arbitraria e ita aſſumatur, vt fiat $m = b$; erit $-2n = a$, ſeu $n = -\frac{1}{2}a$. 2) $\frac{n^2}{m^2} + \frac{e^2p}{2hm^2} = \frac{d}{c}$, ſeu pro m et n valores ſuperiores ſubſtituendo erit $\frac{a^2}{4b^2} + \frac{e^2p}{2hb^2} = \frac{d}{c}$, et $\frac{e^2p}{2hb^2} = \frac{d}{c} - \frac{a^2}{4hb^2}$, ac diuidendo per e^2, et per b^2 multiplicando erit $\frac{p}{2h} = \frac{4b^2d - a^2e}{4e^2c}$, adeoque $p = \frac{8b^2dh - 2a^2ch}{4e^2c} = \frac{4b^2dh - a^2ch}{2e^2c}$. 3) $-2r = 0$, ſeu r et $r^2 = 0$. 4) $-\frac{2ept}{2hm} = 0$, et hinc t et $t^2 = 0$. 5) $-f^2 = -\frac{k^2p}{2h}$, ſeu $f^2 = \frac{k^2p}{2h}$, et pro $\frac{p}{2h}$ valorem ſupra inuentum ſubſtituendo erit $f^2 = \frac{4b^2dh^2 - a^2ch^2}{4e^2c}$, ac proinde $h^2 = \frac{4e^2cf^2}{4b^2d - a^2c}$, et $h = \sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d - a^2c}\right)}$.

Cum ob $r=o$ in Fig. 68 euaneſcat recta HC, recta HE cadit ſupra diametrum AD; et cum ob $t=o$ euaneſcat etiam CF, punctum C ſeu H cadit in centrum F, vbi proinde erit origo abſciſſarum. Praeterea ob valorem z ſeu BE negatiuum, triangulum
Fig. 146. HBE cadit ex parte puncti M. His expenſis fiat in C angulus aequalis ſupplemento anguli dati coordinatarum, et $CB=\frac{1}{2}a$, $CO=b$, et per puncta O et B ducatur recta indefinita MN, triangulum OBC referet triangulum HBE Figurae 68, eritque OB $=e$, et OC axis abſciſſarum. Fiat porro $OQ=OX=\sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}\right)}$, ac diametro QX, parametro $\frac{4b^2dh-a^2ch}{2e^2c}=\left(\frac{4b^2d-a^2c}{2e^2c}\right)\times h=\left(\frac{4b^2d-a^2c}{2e^2c}\times\sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}\right)}\right)$ deſcribatur ellipſis, ac per centrum O ducatur recta Tt ad BC parallela, ſumaturque quaeuis abſciſſa $OR=x$, erit eius ordinata $RS=y$, et $Rs=-y$.

Nam ob triangula OBC et OPR ſimilia erit $OC:OB=OR:OP$, ſeu $b:e=x:OP=\frac{ex}{b}$; item $OC:CB=OR:RP$, ſeu $b:\frac{1}{2}a=x:RP=\frac{ax}{2b}$: ſi ergo ſit $RS=y$, erit $PS=RP+RS=\frac{ax}{2b}+y$; vel ſi $Rs=-y$, erit $Ps=Rs-RP=-y-\frac{ax}{2b}$; eſt vero in ellipſi $SP^2:OX^2-OP^2=p:2h$, ſeu $y^2+\frac{a}{b}xy+\frac{a^2}{4b^2}x^2:\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}-\frac{e^2x^2}{b^2}=\left(\frac{4b^2d-a^2c}{2e^2c}\right)\times\sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}\right)}:2\sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}\right)}$: quare media et extrema multiplicando erit $\left(y^2+\frac{a}{b}xy+\frac{a^2}{4b^2}x^2\right)\times 2\sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}\right)}=\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}-\frac{e^2}{b^2}x^2\right)\times\left(\left(\frac{4b^2d-a^2c}{2e^2c}\right)\times\sqrt{\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}\right)}\right)$ ſeu $2\left(y^2+\frac{a}{b}xy+\frac{a^2}{4b^2}x^2\right)=\left(\frac{4e^2cf^2}{4b^2d-a^2c}-\frac{e^2}{b^2}x^2\right)\times\left(\frac{4b^2d-a^2c}{2e^2c}\right)$ $=2f^2-\frac{4d}{2c}x^2+\frac{a^2}{2b^2}x^2$, et omnia per 2 diuidendo erit $y^2+\frac{a}{b}$

$xy+\frac{a^2}{4b^2}x^2=f^2-\frac{d}{c}x^2+\frac{a^2}{4b^2}x^2$, vnde $y^2+\frac{a}{b}xy+\frac{d}{c}x^2-f^2=0$, quae eſt aequatio propoſita.

Si abſciſſa citra O ſumatur negatiue, e. g. fit $Or=-x$, erit ordinata $rF=y$, et $rf=-y$, id quod eodem plane modo oſtendi poteſt. Eſt ergo arcus VTu locus radicum poſitiuarum, arcus Vtu negatiuarum.

VI. Sit conſtruenda aequatio $y^2+\frac{a}{b}xy+x^2+\frac{1}{1}dy+cx-gf=0$, et ſit $\frac{a}{b}<1$, erit locus ad ellipſim, adeoque conferendus cum eadem aequatione generali. Erit ergo 1) $-\frac{2n}{m}=\frac{a}{b}$, ac ita aſſumendo e vt fiat $m=b$, erit $n=-\frac{1}{2}a$. 2) $\frac{n^2}{m^2}+\frac{e^2p}{2hm^2}=1$, ſeu pro n et m ponendo valores ſuperiores erit $1=\frac{a^2}{4b^2}+\frac{e^2p}{2hb^2}$, vnde $1-\frac{a^2}{4b^2}=\frac{e^2p}{2hb^2}$, et omnia multiplicando per b^2, ac diuidendo per e^2, erit $\frac{b^2}{e^2}-\frac{a^2}{4e^2}=\frac{p}{2h}$, et hinc $p=\frac{8hb^2-2a^2h}{4e^2}=\frac{4hb^2-a^2h}{2e^2}$. 3) $-2r=d$, et $r=-\frac{1}{2}d$. 4) $\frac{2nr}{m}-\frac{2epq}{2hm}=c$, et pro m, n, r, $\frac{p}{2h}$ valores ſupra inuentos ſubſtituendo erit $\frac{ad}{2b}-\frac{8b^2t+2a^2t}{4eb}=\frac{2ad}{2b}-\frac{4b^2t+a^2t}{2eb}$ $=\frac{ade-4b^2t+a^2t}{2eb}=c$, vnde $\frac{2ebc-ade}{4b^2-a^2}=-t$. 5) $r^2-\frac{h^2p}{2h}+\frac{t^2p}{2h}=-gf$, ac pro r^2, et $\frac{p}{2h}$ valores inuentos ſubſtituendo erit $-gf=\frac{1}{4}d^2-\frac{4h^2b^2+a^2h^2+4b^2t^2-a^2t^2}{4e^2}$, vnde $-gf-\frac{1}{4}d^2=-\frac{4h^2b^2+a^2h^2+4b^2t^2-a^2t^2}{4e^2}$, adeoque $-\frac{4e^2gf-e^2d^2}{4b^2-a^2}=-h^2+t^2$, ſeu $h^2=t^2+\frac{4e^2gf+e^2d^2}{4b^2-a^2}$, et $h=\sqrt{\left(t^2+\frac{4e^2gf+e^2d^2}{4b^2-a^2}\right)}$, vbi etiam pro t^2 ſubſtituendus erit valor ſupra inuentus, vt habeatur ſemidiameter tranſuerſa ellipſeos h.

Cum ergo sit $r = -\frac{1}{2}d$, recta FG seu CH in Fig. 68 cadit ex altera diametri parte vna cum recta HE: et quia $n = -\frac{1}{2}a$, etiam recta BE, adeoque totum triangulum HBE ex altera parte cadit; et siquidem in expressione $\frac{2ebc-ade}{4b^2-a^2} = -t$ fuerit $2bc > ad$, etiam recta HG seu CF cadet ex parte opposita centri F, fe-
Fig. 147. cus manebit vt in Fig. 68. His animaduersis, construatur consuetum triangulum HBC, in quo angulus C sit supplementum anguli dati coordinatarum, $BC = \frac{1}{2}a$, $HC = b$; erit $HB = e$, et HC axis abscissarum. Ad haec posito quod $2bc > ad$, in producta BH fiat $HV = \frac{2ebc-ade}{4b^2-a^2} = -t$, et ex puncto V ducatur recta $VO = \frac{1}{2}d$ parallela ad BC, respondebit VH rectae HG in Fig. 68, et VO rectae FG, sed situm habebunt contrarium, eritque origo abscissarum in H. Denique per punctum O ducatur recta indefinita ad HB parallela, in qua fiat $OA = OE = \sqrt{\left(t^2 + \frac{4e^2gf + e^2d^2}{4b^2-a^2}\right)}$, ac diametro transuersa AE, et parametro $\frac{4hb^2-ha^2}{2e^2} = \frac{(4b^2-a^2)}{2e^2} \times h = \frac{(4b^2-a^2)}{2e^2} \times \sqrt{\left(t^2 + \frac{4e^2gf + e^2d^2}{4b^2-a^2}\right)}$ describatur ellipsis; assumta quauis abscissa $HR = x$, erit eius ordinata $RS = y$, et $RT = -y$.

Nam in triangulis HBC et HQR similibus erit $HC : HB = HR : HQ$, seu $b : e = x : HQ = \frac{ex}{b}$; item $HC : CB = HR : RQ$, seu $b : \frac{1}{2}a = x : RQ = \frac{ax}{2b}$; si ergo sit $RS = y$, erit $PS = PQ + QR + RS = \frac{1}{2}d + \frac{ax}{2b} + y$; vel si $RT = -y$, erit $PT = RT - RQ - QP = -y - \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}d$: item $OP = VH + HQ = -t + \frac{ex}{b}$; est autem in ellipsi PS^2 seu $PT^2 : OE^2 - OP^2$, vt parameter ad diametrum transuersam: quare PS^2 ductum in diametrum transuer-

ſam aequatur $OE^2 - OP^2$ ducto in parametrum, ſeu $PS^2 \times 2h = (OE^2 - OP^2) \times p$, vnde $PS^2 = (OE^2 - OP^2) \times \frac{p}{2h}$, adeoque $y^2 + \frac{a}{b}xy + dy + \frac{adx}{2b} + \frac{1}{4}d^2 + \frac{a^2x^2}{4b^2} = \left(h^2 - t^2 + \frac{2etx}{b} - \frac{e^2x^2}{b^2}\right) \times \frac{(4b^2-a^2)}{4e^2}$, ſeu pro $h^2 - t^2$ ponendo $\frac{4e^2gf+e^2d^2}{4b^2-a^2}$, et pro t ponendo $-\frac{2bce+ade}{4b^2-a^2}$, erit $y^2 + \frac{a}{b}xy + \frac{a^2}{4b^2}x^2 + dy + \frac{2adx}{2b} + \frac{1}{4}d^2 = \left(\frac{4e^2gf+e^2d^2}{4b^2-a^2} - \frac{4e^2bcx+2e^2adx}{4b^3-a^2b} - \frac{e^2}{b^2}x^2\right) \times \frac{(4b^2-a^2)}{4e^2}$, ac reapſe multiplicando erit $y^2 + \frac{a}{b}xy + \frac{a^2}{4b^2}x^2 + dy + \frac{adx}{2b} + \frac{1}{4}d^2 = gf + \frac{1}{4}d^2 - cx + \frac{adx}{2b} - x^2 + \frac{a^2}{4b^2}x^2$, et hinc $y^2 + \frac{a}{b}xy + x^2 + dy + cx - gf = 0$, quae eſt aequatio propoſita.

Si abſciſſa capiatur in partem oppoſitam, e. g. ſi ſit $Hr = -x$, erit ordinata $rs = y$, et $rt = -y$, id quod eodem prorſus modo oſtenditur.

VII. Sit conſtruenda aequatio $y^2 + \frac{2a}{b}xy + \frac{a^2}{4b^2}x^2 + 2cy - 2dx - f^2 = 0$. Cum in ea coordinatarum quadrata idem habeant ſignum, et quadratum dimidii coefficientis rectanguli xy maius ſit coefficiente quadrati x^2, patet locum eſſe ad hyperbolam relatam ad diametrum, adeoque conferendum cum aequatione eiuſdem generali (282)

$$y^2 - \frac{2n}{m}xy + \left\{\begin{matrix}\frac{n^2}{m^2} \\ -\frac{e^2p}{2hm^2}\end{matrix}\right\}x^2 - 2ry + \left\{\begin{matrix}\frac{2nr}{m} \\ +\frac{2ept}{2hm}\end{matrix}\right\}x \begin{matrix}+r^2 = 0. \\ +\frac{h^2p}{2h} \\ -\frac{t^2p}{2b}\end{matrix}$$

Inſtituta ergo comparatione erit 1) $-\frac{2n}{m} = \frac{2a}{b}$; ac in formula generali rectam arbitrariam $HE = e$ ita aſſumendo, vt fiat $m = b$,

erit $n = -a$. 2) $\frac{a^2}{m^2} - \frac{e^2p}{2hm^2} = \frac{a^2}{4b^2}$, seu pro m et n valores suos substituendo $\frac{a^2}{b^2} - \frac{e^2p}{2hb^2} = \frac{a^2}{4b^2}$, seu $\frac{3a^2}{4b^2} = \frac{e^2p}{2hb^2}$, et $\frac{3a^2}{4} = \frac{e^2p}{2h}$, vnde $p = \frac{3a^2h}{2e^2}$. 3) $-2r = 2c$, seu $r = -c$. 4) $\frac{2mr}{m} + \frac{2epl}{2hm} = -2d$, et pro m, n, r, $\frac{p}{2h}$ valores suos substituendo erit $\frac{2ac}{b} + \frac{6a^2l}{4eb} = -2d$, vnde $2d + \frac{2ac}{b} = -\frac{6a^2l}{4eb}$, ac multiplicando omnia per $4eb$, et diuidendo per $6a^2$, erit $\frac{4ebd + 4ace}{3a^2} = -l$. 5) $r^2 + \frac{h^2p}{2h} - \frac{l^2p}{2h} = -f^2$, ac pro r^2 et $\frac{p}{2h}$ valores suos substituendo erit $c^2 + \frac{3a^2h^2 - 3a^2l^2}{4e^2} = -f$, vnde $-f^2 - c^2 = \frac{3a^2h^2 - 3a^2l^2}{4e^2}$, ac omnia multiplicando per $4e^2$, et diuidendo per $3a^2$ erit $-\frac{4e^2f^2 - 4e^2c^2}{3a^2} = h^2 - l^2$, vnde $h^2 = l^2 - \frac{4e^2f^2 - 4e^2c^2}{3a^2}$, et $h = \sqrt{\left(l^2 - \frac{4e^2f^2 - 4e^2c^2}{3a^2}\right)}$.

Quare in Fig. 69 ob $r = -c$ recta FG cadit ex altera parte diametri, ac ob $n = -a$ etiam recta BE, adeoque totum triangulum HBE ex parte opposita iacet, ac ob valorem l negatiuum recta HG situm contrarium obtinet respectu originis abscissarum H. His notatis, super recta indefinita HB construatur triangulum consuetum VBC, in quo angulus C sit supplementum anguli dati coordinatarum, $CB = a$, $CV = b$, erit $VB = e$, ac VC axis abscissarum. Fiat $VH = -l = \frac{4ebd + 4ace}{3a^2}$, et ex H ducatur recta $HO = c$ parallela ad BC: et per O recta indefinita OP parallela ad HB: recta VC referet rectam HB in Fig. 69, HB rectam HE, HO rectam FG, VH rectam HG. Fiat demum $OA = OE = h = \sqrt{\left(l^2 - \frac{4e^2f^2 - 4e^2c^2}{3a^2}\right)}$, ac diametro transuersa EA,

Fig. 148.

et parametro $p=\frac{3a^2h}{2e^2}=\frac{3a^2}{2e^2}\times\sqrt{\left(t^2-\frac{4e^2f^2-4e^2c^2}{3a^2}\right)}$ deſcribatur hyperbola: ſi iam capiatur abſciſſa quaeuis $VR=x$, erit eius ordinata $RS=y$, et $RF=-y$.

Eſt enim in triangulis VBC et VQR ſimilibus $VC:VB=VR:VQ$, ſeu $b:e=x:VQ=\frac{ex}{b}$, et $VC:CB=VR:RQ$, ſeu $b:a=x:RQ=\frac{ax}{b}$: ſi ergo ſit $RS=y$, erit $PS=SR+RQ+PQ=y+\frac{ax}{b}+c$; vel ſi $RF=-y$, erit $PF=RF-RQ-PQ=-y-\frac{ax}{b}-c$: item $OP=HQ=HV+VQ=-t+\frac{ex}{b}$. Eſt vero in hyperbola PS^2 vel $PF^2=(OP^2-OA^2)\times\frac{p}{2h}$, ſeu $y^2+\frac{2a}{b}xy+\frac{a^2}{b^2}x^2+2cy+\frac{2acx}{b}+c^2=\left(t^2-\frac{2etx}{b}+\frac{e^2}{b^2}x^2-t^2+\frac{4e^2f^2+4e^2c^2}{3a^2}\right)\times\frac{3a^2}{4e^2}$, ac pro $-t$ ponendo $\frac{4ebd+4ace}{3a^2}$ erit $y^2+\frac{2a}{b}xy+\frac{a^2}{b^2}x^2+2cy+\frac{2acx}{b}=c^2=\left(\frac{8e^2bd-8ace^2}{3a^2b}x+\frac{e^2}{b^2}x^2+\frac{4e^2f^2+4e^2c^2}{3a^2}\right)\times\frac{3a^2}{4e^2}$, ac reapſe multiplicando erit $y^2+\frac{2a}{b}xy+\frac{a^2}{b^2}x^2+2cy+\frac{2acx}{b}+c^2=2dx+\frac{2acx}{b}+\frac{3a^2}{4b^2}x^2+f^2+c^2$, vnde $y^2+\frac{2a}{b}xy+\frac{a^2}{4b^2}x^2+2cy-2dx-f^2=0$, quae eſt aequatio propoſita.

Si abſciſſa ſumatur negatiue, e. g. ſit $Vr=-x$, erit ordinata $rs=y$, et $rf=-y$: erit enim tunc $rq=-\frac{ax}{b}$, hinc $ps=pq-rq+rs=c+\frac{ax}{b}+y$, et $pf=rf-rp=rf-pq+rq=-y-c-\frac{ax}{b}$: cetera fient vt ante.

VIII. Sit conſtruenda aequatio $y^2-x^2+by-ax=0$. Cum in ea deſit rectangulum xy, et quadrata coordinatarum ſignis gaudeant contrariis, patet locum rurſus eſſe ad eandem hyperbolam, adeoque cum eadem aequatione generali conferendam.

Erit ergo 1) $-\frac{2n}{m}=0$, seu $n=0$, adeoque $m=e$. 2) $-\frac{e^2p}{2hm^2}=-1$, seu $e^2p=2hm^2$, et $p=2h$, ex quo adparet hyperbolam esse aequilateram. 3) $-2r=b$, seu $r=-\frac{1}{2}b$. 4) $\frac{2ept}{2hm}=-a$, seu ob $p=2h$, et $e=m$, erit $2t=-a$, et $t=-\frac{1}{2}a$. 5) Denique $r^2+\frac{h^2p}{2h}-\frac{t^2p}{2h}=0$, seu $r^2+h^2-t^2=0$, vnde $h^2=t^2-r^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2$, et $h=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}$.

Igitur in Fig. 69 ob $n=0$ euanescit recta BE et HB congruit cum HE, et ob valores r et t negatiuos recta FG cadit ex parte puncti M, et recta GH ex parte opposita respectu puncti G. Quare diametro $AB=2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}$ describatur hyperbola aequilatera, fiatque $CR=\frac{1}{2}a$, ac sub angulo coordinatarum erigatur $RK=\frac{1}{2}b$, ducaturque recta indefinita KF ad AB parallela, erit quaeuis abscissa $KG=x$, ac eius ordinata $GM=y$, et $GT=-y$. Fig. 149.

Erit enim $BP=BC+CR+RP=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}+\frac{1}{2}a+x$, et $AP=AR+RP=CR-CA+RP=\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2)}+x$, vnde $AP\times BP=ax+x^2+\frac{1}{4}b^2$. Erit item $PM=GM+GP=y+\frac{1}{2}b$, vel $PT=GT-GP=-y-\frac{1}{2}b$, vnde $PM^2=PT^2=y^2+by+\frac{1}{4}b^2$: est autem in hyperbola aequilatera $PM^2=AP\times BP$: ergo $y^2+by+\frac{1}{4}b^2=ax+x^2+\frac{1}{4}b^2$, vnde $y^2-x^2+by-ax=0$, quae est aequatio proposita.

IX. Sit construenda aequatio $xy-\frac{a}{b}y+cx-dh=0$. Cum in ea adsit rectangulum coordinatarum xy sine earundem quadratis, adparet locum esse ad hyperbolam intra asymptotos, conferendum proinde cum alterutra eiusdem aequatione generali, e. g. cum prima (291),

$$xy-\frac{s}{m}x^2-\frac{nt}{e}y+\left.\begin{matrix}+nt\\ e\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}+ntr\\ e\end{matrix}\right.=0.$$
$$\left.\begin{matrix}\\ -r\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\\ -mp\end{matrix}\right.$$

Erit

Erit ergo 1) $-\frac{n}{m}=0$, seu $n=0$, et hinc $m=e$. 2) $-\frac{mt}{e}=-\frac{a}{b}$, seu ob $m=e$, erit $t=\frac{a}{b}$. 3) $-r=c$, seu $r=-c$. 4) $\frac{mtr}{e}-mp=-dh$, ac pro m, t, r valores inuentos substituendo erit $+\frac{ac}{b}+ep=dh$, et $dh-\frac{ac}{b}=ep$, vnde $p=\frac{dh}{e}-\frac{ac}{eb}$; et siquidem in formula generali e ita assumatur, vt fiat $=a$, erit $p=\frac{dh}{a}-\frac{c}{b}$.

Quare in Fig. 72 ob $n=0$ euanescente recta BE congruit HB cum HE, et ob valorem r negatiuum recta IP cadit ex parte altera asymptoti AD. Ducatur ergo recta indefinita HI, in qua fiat $HB=\frac{a}{\beta}$, et in B fiat angulus coordinatarum HBS, sitque $BO=e$, $OT=a$, et $TV=\frac{dh}{a}-\frac{c}{b}$ parallela ad BS: deinde recta OT translata in Ot, et TV in tu, intra asymptotos SD et Tt per puncta V et u describantur hyperbolae oppositae, ac per punctum intersectionis M recta MN parallela ad DS. Iam in recta HI posita in H origine, 1) vbicunque sumatur punctum P inter B et M, semper erit $HP=x$, et ordinata $PQ=y$. 2) Vltra punctum M versus I erit $HP=x$, et $PQ=-y$. 3) Inter H et B erit $Hp=x$, et $pq=-y$. Fig. 150.

Nam in casu primo erit $OR=BP=HP-HB=x-\frac{a}{b}$, et $RQ=RP+PQ=c+y$; atqui $OR\times RQ=OT\times TV$: ergo $cx-\frac{ac}{b}+xy-\frac{ay}{b}=dh-\frac{ac}{b}$: vnde $xy-\frac{a}{b}y+cx-dh=0$, quae est aequatio proposita.

In secundo casu rursus $OR=x-\frac{a}{b}$, et $RQ=PR-PQ=c+y$, vt ante.

In tertio caſu $Or = HB - Hp = \frac{e}{b} - x$, et $rq = pq - pr = -y - c$: ergo $Or \times rq = -\frac{ay}{b} + xy - \frac{ac}{b} + cx = Ot \times tu = dh - \frac{ac}{b}$, vnde $xy - \frac{a}{b}y + cx - dh = 0$, vt ſupra.

X. Sit conſtruenda aequatio $xy + \frac{a}{b}y^2 - dy - gh = 0$. Cum in ea adſit rectangulum xy, cum quadrato vnius coordinatae y^2, patet locum eſſe iterum ad hyperbolam intra aſymptotos, et quidem ob quadratum illud y^2 conferendum cum aequatione generali eiuſdem ſecunda (291)

$$xy - \frac{n}{m}y^2 - \frac{mt}{e}x \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right. \frac{nt}{e} \left\} y \left\{ \begin{matrix} + \frac{ntr}{e} \\ - mq \end{matrix} \right. \right. = 0.$$

Erit ergo 1) $-\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$; et ſi in formula generali ita aſſumatur recta arbitraria e, vt fiat $m = b$, erit $n = -a$. 2) $-\frac{mt}{e} = 0$, et hinc $t = 0$. 3) $-r = -d$, ſeu $r = d$. 4) $-mp = -gh$, ſeu $mp = gh$, vnde $p = \frac{gh}{m} = \frac{gh}{b}$.

Igitur ob $t = 0$, in Fig. 73 euaneſcente recta AC, recta HN cadit ſupra aſymptotum AT, et ob valorem n negatiuum recta BE, adeoque totum triangulum HBE cadit ex parte oppoſita. Fig. 251. Quare ducta recta indefinita HS fiat conſuetum triangulum HBD, in quo angulus D ſit ſupplementum anguli dati coordinatarum, $BD = a$, $DH = b$, erit $HB = e$. Per punctum H ducatur recta indefinita HI parallela ad BD, fiatque $HA = d$, et ex A ducatur recta indefinita AG parallela ad HS, cui occurrat recta BD producta in Q, in qua fiat $QR = \frac{gh}{b}$: denique intra aſymptotos AG et AI per punctum R deſcribatur hyperbola; quodſi in recta HI ſumatur quaeuis abſciſſa $HP = x$, erit eius ordinata PK ad HD parallela $= y$.

Nam in triangulis HBD et HNM similibus est HD : HB = HM : HN, seu $b : e = y : HN = AO = \frac{ey}{b}$; item HD : DB = HM : MN, seu $b : a = y : MN = \frac{ay}{b}$: quare $OK = MK + NM - NO = x + \frac{ey}{b} - d$; est autem ex natura hyperbolae $AQ \times QR$, seu $HB \times QR = AO \times OK$: ergo $\frac{egh}{b} = \frac{exy}{b} + \frac{aey^2}{b^2} - \frac{edy}{b}$, ac omnia multiplicando per b, diuidendo per e, et transponendo erit $xy + \frac{a}{b}y^2 - dy - gh = 0$, quae est aequatio proposita.

Scholion. In huiusmodi constructionibus tironi quaedam obseruanda erunt. 1) Peracta constructione, et inuentis radicibus positiuis aequationis multum proderit contemplari etiam radices negatiuas, quas eadem constructio plene absoluta exhibet, vt in exemplis nonnullis vidimus; in ceteris tironis exercitationi reliquimus.

2) Si in construendis locis ad hyperbolam intra asymptotos prodiret recta $p = 0$, non posset hyperbola construi: at tunc aequatio semper posset ad gradum primum, seu ad lineam rectam deprimi. E. g. Aequatio generalis prima hyperbolae omisso termino $-mp$ erit $xy - \frac{n}{m}x^2 - \frac{ns}{e}y + \frac{ns}{e}x - rx + \frac{nsr}{e} = 0$, ac omnia multiplicando per e, et diuidendo per m erit $\frac{e}{m}xy - \frac{en}{m^2}x^2 - ty + \frac{ns}{m}x - \frac{er}{m}x + tr = 0$, et rursus omnia diuidendo per $\frac{e}{m}x - t$ erit $y - \frac{n}{m}x - r = 0$, quae aequatio est ad rectam.

3) Si in construendis locis ad circulum, ellipsim, et hyperbolam ad diametros relatam prodiret h^2 valoris negatiui e. g. $h^2 = -d^2$, foret $h = \sqrt{-d^2}$ quantitas impossibilis, adeoque ipsa etiam constructio euaderet impossibilis.

4) Si vero prodiret $h^2=0$, posset aequatio iterum ad gradum primum deprimi. E. g. aequatio generalis ad hyperbolam relatam ad diametros omisso termino vbi est h^2 abit in hanc $y^2-\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}x^2-\frac{e^2p}{2hm^2}x^2-2ry+\frac{2nr}{m}x+\frac{2epst}{2hm}x+r^2-\frac{t^2p}{2h}=0$, quae transponendo erit $y^2-\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}x^2-2ry+\frac{2nr}{m}x+r^2=\frac{e^2p}{2hm^2}x^2-\frac{2epst}{2hm}x+\frac{t^2p}{2h}$, ac radicem quadratam vtrinque extrahendo $y-\frac{n}{m}x-r=\left(\frac{e}{m}x-t\right)\times\sqrt{\frac{p}{2h}}$, seu $y=\frac{n}{m}x+r+\left(\frac{e}{m}x-t\right)\times\sqrt{\frac{p}{2h}}$, quae aequatio est ad rectam facile construenda. Ponamus enim terminos fractionis $\frac{p}{2h}$ esse multiplicatos per rectam aliquam m pro vnitate assumtam, erit $\sqrt{\frac{1p}{2h}}=\sqrt{\frac{pm}{2hm}}$; quare inter m et p quaerenda est media proportionalis d, eritque $d^2=mp$, seu cum $m=1$, erit $d^2=p$, et $d=\sqrt{p}$. Similiter quaerenda est media proportionalis b inter m et $2h$, eritque $b^2=2h$, et $b=\sqrt{2h}$: quare prior illa aequatio abit in hanc facile construendam $y=\frac{n}{m}x+r+\frac{dex}{bm}-\frac{dt}{b}$.

CAPVT VI.

De superiorum Constructionum Adplicationibus ad varia Problemata.

Fig. 152. 345. *Probl. Super data recta* AB *construere triangulum* ABM, *in quo quadrata laterum* AM *et* BM *sint in ratione data.*

Resol. Sit vertex trianguli construendi M, et $AM^2:BM^2=m:n$, $AB=a$, ac demisso perpendiculo MD, sit $DB=x$, erit $AD=a-x$; sit item $MD=y$, erit $AM^2=AD^2+MD^2=a^2-2ax+x^2+y^2$; et $BM^2=DB^2+MD^2=x^2+y^2$, erit ergo $m:n=a^2-2ax+x^2+y^2:x^2+y^2$, vnde $mx^2+my^2=$

$na^2 - 2anx + nx^2 + ny^2$, et $x^2 + y^2 + \frac{2anx}{m-n} - \frac{a^2n}{m-n} = 0$, adeoque $x^2 + \frac{2anx}{m-n} = \frac{a^2n}{m-n} - y^2$, et in membro primo quadratum complendo $x^2 + \frac{2anx}{m-n} + \frac{n^2a^2}{(m-n)^2} = \frac{n^2a^2}{(m-n)^2} + \frac{a^2n}{m-n} - y^2$. Fiat primi membri radix $x + \frac{an}{m-n} = q$, erit $q^2 = \frac{n^2a^2}{(m-n)^2} + \frac{a^2n}{m-n} - y^2$, seu $y^2 = \frac{n^2a^2}{(m-n)^2} + \frac{a^2n}{m-n} - q^2 = \frac{n^2a^2 + a^2mn - a^2n^2}{(m-n)^2} - q^2 = \frac{a^2mn}{(m-n)^2} - q^2$, quae aequatio est ad circulum abscissis a centro computatis, cuius radius est $= \frac{\sqrt{a^2mn}}{m-n} = \frac{a\sqrt{mn}}{m-n}$.

Constr. In producta recta AB fiat $BC = \frac{an}{m-n}$, ac centro C radio $CM = \frac{a\sqrt{mn}}{m-n}$ describatur circulus, erit eiusdem peripheria locus verticis M trianguli construendi: seu demisso perpendiculo MD erit $BD = x$, $DM = y$. Erit enim $CM^2 - CD^2 = MD^2$, seu $\frac{a^2mn}{(m-n)^2} - \frac{a^2n^2}{(m-n)^2} - \frac{2anx}{m-n} - x^2 = y^2$, et hinc $y^2 + x^2 + \frac{2anx}{m-n} - \frac{a^2mn + a^2n^2}{(m-n)^2} = y^2 + x^2 + \frac{2anx}{m-n} - \frac{a^2n}{m-n} = 0$, quae est aequatio construenda.

346. *Coroll.* Si abscissa BD sumatur negatiue vbiuis inter B et F, erit arcus QF locus ordinatarum positiuarum, et arcus RF locus ordinatarum negatiuarum respondentium abscissae negatiuae $-x$; quemadmodum arcus EQ est locus ordinatarum positiuarum, et arcus ER locus negatiuarum respondentium abscissae positiuae x. Nam sit e. g. $BG = -x$, $GH = -y$, erit $CG = BG - BC = -x - \frac{an}{m-n}$, vel $= BC - BG = \frac{an}{m-n} + x$, si punctum G cadat inter B et C: atqui $GH^2 = CH^2 - CG^2$, seu $y^2 =$

$\frac{a^2mn}{(m-n)^2} - \frac{2anx}{m-n} - x^2 - \frac{na^2}{(m-n)^2}$, quae aequatio reducitur vt ſupra ad $y^2 + x^2 + \frac{2nax}{m-n} - \frac{na^2}{m-n} = 0$.

Fig. 153. 347. *Probl. Data recta quapiam* AB, *et extra eandem punctо* F, *erigere ex eadem perpendiculum* PM *hac lege, vt ducta recta* FM *ratio* PM: FM *conſtans ſit.*

Reſol. Sit ratio data $a:b$, et ſit 1) $a=b$, erit PM = FM, adeoque locus punctorum M erit parabola, cuius focus eſt F, directrix AB. Facile autem conſtruitur haec parabola; nam ſi ex F ad AB demittatur perpendiculum FA, et in H biſecetur, erit in H parabolae vertex, et 4AH eiuſdem parameter.

2) Sit $a > b$, FA = c, AP = x, PM = y, ac ad rectam FA productam demittatur perpendiculum MN, erit FN = AN − AF = $y - c$, vel = $c - y$, ſi punctum N cadat inter F et H: eſt vero $FM^2 = MN^2 + FN^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2$, et ex hypotheſi PM: FM = $a:b$, ſeu $PM^2 : FM^2 = a^2 : b^2$; quare $y^2 : x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = a^2 : b^2$: ergo $b^2y^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cy + a^2c^2$, ac omnia tranſponendo, et per $a^2 - b^2$ diuidendo erit $y^2 + \frac{a^2x^2}{a^2-b^2} - \frac{2a^2cy}{a^2-b^2} + \frac{a^2c^2}{a^2-b^2} = 0$, quam aequationem alibi iam conſtruximus ac ad ellipſim eſſe vidimus (342).

3) Sit $a < b$, cetera vt ſupra, erit $FM^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2$; atqui ex hypotheſi $PM^2 : FM^2 = a^2 : b^2$: ergo $y^2 : x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = a^2 : b^2$, vnde $b^2y^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cy + a^2c^2$, ac omnia tranſponendo, et per $b^2 - a^2$ diuidendo erit $y^2 - \frac{a^2x^2}{b^2-a^2} + \frac{2a^2cy}{b^2-a^2} - \frac{a^2c^2}{b^2-a^2} = 0$, vbi cum deſit rectangulum xy, et quadrata coordinatarum y^2 et x^2 diuerſis gaudeant ſignis, patet locum eſſe ad hyperbolam.

Igitur inſtituta comparatione cum generali hyperbolae aequatione erit 1) $-\frac{2n}{m}=0$, ſeu $n=0$, vnde $m=e$, poteritque in formula generali recta e ita aſſumi, vt ſit $e=a$. 2) $-\frac{e^2p}{2hm^2}=-\frac{p}{2h}=-\frac{a^2}{b^2-a^2}$, ſeu $\frac{p}{2h}=\frac{a^2}{b^2-a^2}$, vnde $p=\frac{2a^2h}{b^2-a^2}$. 3) $-2r=\frac{2a^2e}{b^2-a^2}$, vnde $r=-\frac{a^2e}{b^2-a^2}$. 4) $t=0$. 5) $r^2\pm\frac{h^2p}{2h}=-\frac{a^2e^2}{b^2-a^2}$, et pro r^2 ac $\frac{p}{2h}$ ſuos valores ſubſtituendo erit $\frac{a^4e^2}{(b^2-a^2)^2}\pm\frac{a^2h^2}{b^2-a^2}=-\frac{a^2e^2}{b^2-a^2}$, ſeu $-\frac{a^2e^2}{b^2-a^2}-\frac{a^4e^2}{(b^2-a^2)^2}=\pm\frac{a^2h^2}{b^2-a^2}$, et $-e^2-\frac{a^2e^2}{b^2-a^2}=\pm h^2$, ſeu $-\frac{b^2e^2+a^2e^2-a^2e^2}{b^2-a^2}=-\frac{b^2e^2}{b^2-a^2}=\pm h^2$: quare vt h^2 ſit quantitas poſitiua, debet ſumi cum ſigno —, et hinc $2h=2\sqrt{\left(\frac{b^2e^2}{b^2-a^2}\right)}$ eſt diameter hyperbolae coniugata (288). Denique valorem hunc pro h ſubſtituendo in aequatione $p=\frac{2a^2h}{b^2-a^2}$ erit $p=\frac{2a^2}{b^2-a^2}\times\sqrt{\left(\frac{b^2e^2}{b^2-a^2}\right)}$.

Conſtr. Ob valorem r negatiuum producatur perpendiculum FA citra rectam AB; fiatque $AC=\frac{a^2e}{b^2-a^2}$, et per punctum C ducatur recta indefinita LD parallela ad AB, ac fiat $CD=CL=\sqrt{\left(\frac{b^2e^2}{b^2-a^2}\right)}$; tum diametro coniugata LD, parametro $\frac{2a^2}{b^2-a^2}\times\sqrt{\left(\frac{b^2e^2}{b^2-a^2}\right)}$ deſcribantur hyperbolae oppoſitae, et ſumamatur quaeuis abſciſſa $AP=x$, erit eiuſdem ordinata $PM=y$, et $PT=-y$. Fig. 153.

Erit enim $GM=PM+PG=y+\frac{a^2e}{b^2-a^2}$, vel $GT=PT-PG=-y-\frac{a^2e}{b^2-a^2}$, eſt vero in hyperbola GM^2 vel GT^2 ad

CD^2+CG^2 ſicut p: $2h$, vnde $GM^2=(CD^2+CG^2)\times\frac{p}{2h}$, ac inuentos valores ſubſtituendo $y^2+\frac{2a^2cy}{b^2-a^2}+\frac{a^4c^2}{(b^2-a^2)^2}=\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-a^2)^2}+\frac{a^2x^2}{b^2-a^2}$, et hinc $y^2-\frac{a^2x^2+2a^2cy}{b^2-a^2}-\frac{a^2b^2c^2+a^4c^2}{(b^2-a^2)^2}=0$, et fractionis poſtremae terminos diuidendo per b^2-a^2 erit $y^2-\frac{a^2x^2}{b^2-a^2}+\frac{2a^2cy}{b^2-a^2}-\frac{a^2c^2}{b^2-a^2}=0$, quae eſt aequatio conſtruenda.

Fig. 154. 348. *Probl. Data poſitione rectae cuiuſpiam* AB, *ac dato in eadem puncto* C, *et extra eandem puncto* D, *inuenire locum omnium punctorum* M *eiuſmodi, vt ſi ex* C *ad illud ducatur recta* CM, *et ex* D *per illud recta* DG *occurrens rectae* AB *alicubi in* G, *ſemper ſit* MC=MG.

Reſol. Sit punctum M vnum e quaeſitis: demiſſis perpendiculis DO et MT notae erunt rectae $CO=2a$, et $DO=2b$; ſit igitur $CT=x$, $TM=y$, ductis rectis CM, et DMG, cum ex hypotheſi debeat eſſe MC=MG, erit etiam $CT=TG=x$, ac in triangulis GOD et GTM ſimilibus GO: OD=TG: TM, ſeu $2x-2a:2b=x:y$, vnde $2xy-2ay=2bx$, ſeu $xy-ay=bx$. Fiat $x-a=u$, erit $x=u+a$, hinc $uy=bu+ba$, et $uy-bu=ba$. Fiat rurſus $y-b=q$, erit $qu=ab$, quae aequatio eſt ad hyperbolam intra aſymptotos.

Conſtr. Fiat $CN=\frac{1}{2}CO=a$, et in R erigatur perpendiculum indefinitum NR, in quo capiatur $NP=\frac{1}{2}OD=b$, ac per P ducatur recta indefinita HH parallela ad AB: tum intra aſymptotos NR et HH deſcribantur hyperbolae oppoſitae rectanguli ab, tranſibunt eae per puncta C et D ob $PN\times NC=PF\times FD=ab$. Capiatur iam quaeuis abſciſſa $PQ=u$, erit eius ordinata $QM=q$, adeoque $CT=a+u=x$, et $TM=b+q=y$. Eſt enim ex natura hyperbolae $PQ\times QM=PF\times FD=ab$; ſed $PQ=NT=x-a$, et

QM=

$QM = TM - TQ = y - b$: ergo $xy - ay - bx + ab = ab$, seu $xy - ay - bx = 0$, et $xy - ay = bx$, quae est aequatio construenda.

349. *Probl. Si per datae rectae* AB *extremum* A *transeat* Fig. 155. *recta* NM, *ita vt sit* $AM = \frac{1}{2} AN$, *et ex altero extremo* B *ducatur recta* BM, *inuenire locum punctorum* N, *ita vt semper sit* MB=MN.

Resol. Sit N vnum e quaesitis punctis, et demisso perpendiculo NP sit $AB = a$, $AP = x$, $PN = y$, erit $AN = \sqrt{(AP^2 + PN^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, et $AM = \frac{1}{2} AN = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)}$, adeoque $BM = MN = \frac{3}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Porro ad rectam AB productam demisso perpendiculo MR, in triangulis APN et AMR similibus cum ex hypothesi sit $AN = 2AM$, erit etiam $AP = 2AR$, et $PN = 2MR$, vnde $MR = \frac{1}{2} y$, $AR = \frac{1}{2} x$, $BR = a + \frac{1}{2} x$; est autem $MB^2 = MR^2 + BR^2 = a^2 + ax + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} y^2$; atqui $MB^2 = \frac{9}{4}(x^2 + y^2)$: ergo $\frac{9}{4} x^2 + \frac{9}{4} y^2 = a^2 + ax + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} y^2$, seu $2x^2 + 2y^2 = a^2 + ax$, et hinc $x^2 - \frac{1}{2} ax = \frac{1}{2} a^2 - y^2$, et complendo quadratum $x^2 - \frac{1}{2} ax + \frac{a^2}{16} = \frac{9}{16} a^2 - y^2$. Fiat primi membri radix $x - \frac{1}{4} a = u$, erit $u^2 = \frac{9}{16} a^2 - y^2$, et $y^2 = \frac{9}{16} a^2 - u^2$, quae aequatio est ad circulum, cuius radius $= \frac{3}{4} a$.

Constr. Fiat $BC = \frac{3}{4} a$, ac ea tanquam radio ducatur circulus DNB, erit eius peripheria locus punctorum N. Nam assumta quauis $CP = u$, erit $PN = y$, et hinc $AP = \frac{1}{4} a + u = x$; atqui $CN^2 - CP^2 = PN^2$, seu $\frac{9}{16} a^2 - x^2 + \frac{1}{2} ax - \frac{a^2}{16} = y^2$, et hinc $x^2 - \frac{1}{2} ax = \frac{1}{2} a^2 - y^2$, quae est aequatio construenda.

350. *Coroll.* Eodem modo inuenitur locus punctorum M. Sit enim $AR = p$, $MR = q$, erit $AP = 2p$, $PN = 2q$: et quia $AC = \frac{1}{4} a$, et $DC = \frac{3}{4} a$, erit $AD = \frac{2}{4} a = \frac{1}{2} a$; hinc ductis rectis NC et MQ parallelis, ob triangula ANC et AMQ similia, et ob $AM = \frac{1}{2} AN$, erit etiam $AQ = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{8} a$; porro DP=

$AD+AP=\frac{1}{2}a+2p$: et $PB=AB-AP=a-2p$: eſt vero in circulo $DP\times PB=PN^2$, ſeu $\frac{1}{2}a^2+ap-4p^2=4q^2$, vnde $p^2-\frac{1}{4}ap=\frac{1}{8}a^2-q^2$, et complendo quadratum $p^2-\frac{1}{4}ap+\frac{a^2}{64}=\frac{9a^2}{64}-q^2$. Fiat primi membri radix $x-\frac{1}{8}a=t$, erit $t^2=\frac{9a^2}{64}-q^2$, quae aequatio eſt ad circulum, cuius radius $=\frac{3}{8}a$. Quare ſi radio $QM=\frac{3}{8}a$ deſcribatur circulus CMD, erit eius peripheria locus quaeſitus, in quo ſi a centro Q ſumatur quaeuis $QR=t$, erit $RM=q$; et quia $AQ=\frac{1}{8}a$, erit $AR=t+\frac{1}{8}a=p$.

Fig. 156. 351. *Datis binis circulis aequalibus, ac ſe in punctis* A *et* B *interſecantibus, inuenire locum omnium punctorum* M *eiuſmodi, vt eorum diſtantiae a datorum circulorum peripheriis* MQ *et* MR *ſemper ſint aequales.*

Reſol. Sit M vnum id genus punctum: e centris C et F ducantur rectae CM et FMQ, erit ex hypotheſi $QM=RM$. Sit $CR=FQ=a$, $CF=b$, perpendiculum $MP=y$, $CP=x$, erit $CM=\sqrt{(CP^2+PM^2)}=\sqrt{(x^2+y^2)}$; $RM=CM-CR=\sqrt{(x^2+y^2)}-a$; $FP=x-b$; $FM=\sqrt{(FP^2+PM^2)}=\sqrt{(x^2-2bx+b^2+y^2)}$, et hinc $QM=FQ-FM=a-\sqrt{(x^2-2bx+b^2+y^2)}$; atqui $RM=QM$: ergo $\sqrt{(x^2+y^2)}-a=a-\sqrt{(x^2-2bx+b^2+y^2)}$, ſeu $\sqrt{(x^2+y^2)}-2a=-\sqrt{(x^2-2bx+b^2+y^2)}$, et eleuando ad quadratum $x^2+y^2-4a\sqrt{(x^2+y^2)}+4a^2=x^2-2bx+b^2+y^2$, ſeu $-4a\sqrt{(x^2+y^2)}=b^2-2bx-4a^2$, et rurſus eleuando $16a^2x^2+16a^2y^2=b^4-4b^3x+4b^2x^2-8a^2b^2+16a^2bx+16a^4$, ſeu $16a^2x^2-16a^2bx+8a^2b^2-4b^2x^2+4b^3x-b^4-16a^4=-16a^2y^2$, ac omnia diuidendo per 4, tum per $4a^2-b^2$ erit $x^2-bx+\frac{1}{4}b^2-a^2=-\frac{4a^2y^2}{4a^2-b^2}$, ſeu $x^2-bx+\frac{1}{4}b^2=a^2-\frac{4a^2y^2}{4a^2-b^2}$. Fiat primi membri radix $x-\frac{1}{2}b=u$, erit $u^2=a^2-\frac{4a^2y^2}{4a^2-b^2}$, ſeu $\frac{4a^2}{4a^2-b^2}y^2=a^2-u^2$, quae eſt aequatio ad ellipſim

abſciſſis a centro computatis, cuius axis tranſuerſus $= 2a$, coniugatus $= \sqrt{(4a^2 - b^2)}$.

Conſtr. Diuidatur CF bifariam in K, tum axe tranſuerſo ED, et coniugato $\sqrt{(4a^2 - b^2)}$ deſcribatur ellipſis ADBE, erit ea locus quaeſitus, in qua aſſumta quauis abſciſſa $KP = u$, erit $PM = y$; et quia $CK = \frac{1}{2}b$, erit $CP = u + \frac{1}{2}b = x$. Eſt enim ellipſeos formula $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$; atqui hic $b^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2$, $x^2 = KP^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$: ergo $y^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2 - (x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2) \times \frac{(a^2 - \frac{1}{4}b^2)}{a^2}$, et omnia multiplicando per $4a^2$ erit $4a^2y^2 = 4a^4 - a^2b^2 - (x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2) \times (4a^2 - b^2)$, ac diuidendo per $4a^2 - b^2$ erit $x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 = a^2 - \frac{4a^2y^2}{4a^2 - b^2}$, quae eſt aequatio conſtruenda.

352. *Coroll.* 1. Si centris circulorum F et C ad ſe continenter accedentibus circuli demum congruant, ellipſis in circulum cum iiſdem congruentem degenerabit: erit enim $b = 0$, adeoque omiſſis terminis vbi b occurrit, erit $x^2 = a^2 - \frac{4a^2y^2}{4a^2} = a^2 - y^2$, et $y^2 = a^2 - x^2$, quae aequatio eſt ad circulum, cuius radius $= a$.

353. *Coroll.* 2. Sin autem centris C et F ſenſim recedentibus circuli ſe demum tangant, erit CF ſeu $b = 2a$, hinc axis coniugatus $\sqrt{(4a^2 - b^2)}$ euaneſcet, puncto A cum B congruente, et ellipſis abibit in rectam CF, euaneſcentibus ordinatis y: quare pro b ponendo $2a$, et omiſſo termino vbi eſt y, erit $x^2 - 2ax + a^2 = a^2$, et hinc $x = +a \pm \sqrt{a^2} = 2a$ vel $= 0$; hoc eſt, puncta quaeſita duo duntaxat erunt, nempe centra C et F; eritque problema in hoc caſu determinatum.

354 *Probl. Si datae rectae* AB *inſiſtant duae aliae poſitione datae* AQ *et* BQ, *concurrentes in* Q, *ac e quouis rectae* AB *pun-* Fig. 157.

ſto E *erigatur perpendiculum* ED *occurrens iisdem in* R *et* D, *inuenire in hoc perpendiculo locum punctorum* M *talium, vt ſit* $EM^2 = ER \times ED$.

Reſol. Demittatur perpendiculum, quod cadet vel inter A et B, vel extra. Sit in caſu primo $AB = a$, $AE = u$, $ER = x$, $EM = y$, $ED = z$, erit ex hypotheſi $xz = y^2$. Porro ob datam rectarum poſitionem datur ratio rectarum AE et ER; item BE et ED; ſit $AE : ER = m : n$, et $BE : ED = b : c$, erit $m : n = u : ER = \frac{nu}{m}$; et $b : c = a - u : z$, vnde $z = \frac{ac - uc}{b}$; quibus valoribus ſubſtitutis erit $y^2 = \frac{(ac - uc)}{b} \times \frac{nu}{m}$, et hinc $\frac{bm}{cn} y^2 = au - u^2$, quae aequatio eſt ad ellipſim abſciſſis a vertice computatis, cuius axes ſunt a, et $a\sqrt{\frac{cn}{bm}}$; quibus deſcripta ellipſis erit locus quaeſitus. Eſt enim in ellipſi EM^2 ad $AE \times EB$, vt quadratum axis coniugati ad quadratum tranſuerſi, ſeu $y^2 : au - u^2 = \frac{a^2 cn}{bm} : a^2$, vnde $\frac{bm}{cn} y^2 = au - u^2$, quae eſt aequatio conſtruenda.

Fig. 158. 355. *Coroll.* 1. Si perpendiculum QF cadat extra puncta A et B, ſit vt ante $AB = a$, $AE = u$, $EM = y$, $ER = x$, $ED = z$, erit $BE = u - a$ et hinc $ED = \frac{uc - ac}{b} = z$, et $ER = x = \frac{nu}{m}$: eſt autem ex hypotheſi $y^2 = xz$; ergo $y^2 = \frac{(uc - ac)}{b} \times \frac{nu}{m}$, ſeu $\frac{bm}{cn} y^2 = u^2 - au$, quae aequatio eſt ad hyperbolam abſciſſis a vertice computatis, deſcribendam diametris $AB = a$, et $a\sqrt{\frac{cn}{bm}}$, eritque eadem locus quaeſitus. Eſt enim in hyperbola $EM^2 : AE \times BE$ ſicut quadratum diametri coniugatae ad quadratum tranſuerſae, ſeu $y^2 : u^2 - au = \frac{a^2 cn}{bm} : a^2$, vnde $\frac{bm}{cn} y^2 = u^2 - au$, quae eſt aequatio conſtruenda.

356. *Coroll.* 2. Si rectarum alterutra e. g. AQ rectae AB non insisteret, sed foret parallela habens situm aQ, notum hoc ipso foret perpendiculum $RE=m$; sit iam $AB=a$, $BE=x$, $ED=z$, $EM=y$, ac $BE:ED=m:n$, seu $x:ED=ER:n$, aequatio $y^2=xz$ abibit in hanc $y^2=xn$, quae est ad parabolam parametro n, diametro AB facile describendam. Fig. 159.

Scholion. Licebit hic tironi rursus contemplari varias loci geometrici transformationes mutatis nonnihil problematis conditionibus. Dum punctum A sensim recedit a B, ellipsis continenter oblongatur, acceditque ad parabolam, in quam degenerat puncto A infinite recedente, seu aQ cum AB ad situm parallelum deueniente. Si porro aQ vltra situm illum parallelum diuaricetur, iam punctum concursus A redit ex parte opposita, et parabola mutatur in hyperbolam, quae puncto A versus B accedente sensim diminuitur, ac puncto A in B cadente penitus euanescit. Si deinde A incipiat recedere a puncto B, iterum redit hyperbola, et abit in rectam, cum aQ fit ad AB perpendicularis; et recta haec puncto A vltra recedente mutatur in ellipsim, vt erat initio.

SECTIO III.

De Combinatione Locorum Geometricorum, ac de conſtructione aequationum tertii, et quarti gradus.

CAPVT I.

De mutuis Interſectionibus duorum locorum geometricorum.

357. Cum duo loca geometrica ita conſtruuntur, vt communes habeant coordinatas, dicuntur *combinari.* Quia vero communes habere coordinatas nequeunt, niſi eas, quae reſpondent communibus eorundem interſectionibus, omnino neceſſe eſt, vt mutuas haſce interſectiones contempletur tiro, priuſquam ad eorundem combinationes gradum faciat.

358. Vt autem generatim definiatur numerus interſectionum duorum quorumuis locorum geometricorum, ſic erit inſtituenda ratiocinatio. Cum in punctis interſectionum coordinatae amborum eaedem ſint, valor vnius coordinatae ex vnius loci aequatione erutus ſubſtituatur in alterius aequatione, orietur inde aequatio determinata vnicam continens incognitam, alteram videlicet coordinatam, quae proinde tot praeciſe habebit radices, quot eius exponens vnitates: cumque impoſſibile ſit, vt eius radix e. g. y ſit communis vtriuſque loci ordinata alibi, quam vbi duo illa loca ſe interſecant, patet reſolutione huiuſmodi aequationis inueniri puncta interſectionum.

359. *Coroll.* 1. E binis aequationibus primi gradus ea ſubſtitutione oritur aequatio pariter primi tantum gradus vnicam

habens radicem: quare duo loca geometrica primi gradus, seu duae rectae, nonnisi in vnico puncto possunt sibi occurrere, quod quidem patet ex ipsis elementis.

360. *Coroll.* 2. E binis aequationibus, quarum altera sit primi, altera secundi gradus, oritur aequatio gradus secundi. Vniuerse e binis, quarum vna fuerit gradus m, altera gradus n, oritur aequatio gradus mn.

361. *Coroll.* 3. Interdum tamen ea substitutione obtinetur aequatio determinata gradus inferioris, seu pauciores indicans radices, quam sit numerus intersectionum, cum scilicet deficiente termino vltimo quaedam radices fiunt aequales nihilo.

E. g. Si fuerint duae aequationes $ay - bx = 0$, et $y^2 + x^2 - 2ax = 0$, habentes communem coordinatam x, erit ex prima $x = \frac{ay}{b}$, et $x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}$, quo valore in secunda substituto erit $y^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} - \frac{2a^2y}{b} = 0$, seu $\frac{(a^2+b^2)}{b^2} y^2 - \frac{2a^2y}{b} = 0$, vel $y^2 - \frac{2a^2by}{a^2+b^2} = 0$, et hinc $y - \frac{2a^2b}{a^2+b^2} = 0$, vbi adparet primum quidem oriri aequationem gradus 1×2, deinde eandem deprimi ad gradum primum cum termino vltimo deficiente vna radix y fit $= 0$.

362. Porro cum aequatio determinata hoc modo enascens possit habere radices aliquas, vel omnes imaginarias, et intersectio imaginaria sit intersectio nulla, euidens est, e solo nouae huius aequationis gradu numerum intersectionum definiri haud posse.

E. g. Sit circuli cuiuspiam radius $CO = r$, abscissa $CP = z$, ordinata $PO = u$, erit $r^2 = z^2 + u^2$. Sint rectae CQ et CR axes coordinatarum CP et PO, quibus occurrat recta AB in punctis A et B, sitque $CA = a$, $CB = b$, et quaeratur, quoties recta AB occurrat peripheriae circuli. Sit $AB = c$, erit $c = \sqrt{(a^2+b^2)}$. Fiat AB axis ordinatarum, ac abscissa $AT = x$, ordinata eius- Fig. 160.

dem $TO=y$, erit $AB:CB=TO:CP$, seu $c:b=y:z$, vnde $z=\frac{by}{c}$: item $TO:AB=TP:AC$, seu $y:c=TP:a$, vnde $TP=\frac{ay}{c}$, et hinc $CP=AT-AC+TP$, hoc est, $z=x-a+\frac{ay}{c}$: quare si in aequatione $r^2=z^2+a^2$ valores inuenti substituantur, erit $r^2=x^2-2ax+a^2+\frac{2axy}{c}-\frac{2a^2y}{c}+\frac{a^2y^2}{c^2}+\frac{b^2y^2}{c^2}$, et pro a^2+b^2 ponendo c^2 erit $r^2=x^2-2ax+a^2+\frac{2axy}{c}-\frac{2a^2y}{c}+y^2$.

Si iam puncto T abeunte in A fiat $x=0$, erit $r^2=a^2-\frac{2a^2y}{c}+y^2$, quae aequatio determinata cum duas habeat radices reales, patet rectam AB posse circuli peripheriae occurrere in duobus punctis I et K, quibus respondent ordinatae AI et AK, quae sunt huius aequationis radices, nempe $y=\frac{a^2\pm\sqrt{(a^4-a^2c^2+r^2c^2)}}{c}$, aut pro a^2-c^2 ponendo b^2, radices sunt $\frac{a^2\pm\sqrt{(r^2c^2-a^2b^2)}}{c}$.

Si fuerit $r^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$, seu $r=\frac{ab}{c}$, recta AB cadet in MN, et ambae radices aequales erunt, punctis I et K coeuntibus in E: vnde recta MN tanget duntaxat circuli peripheriam in E.

Si fuerit $r^2<\frac{a^2b^2}{c^2}$, seu $r<\frac{ab}{c}$, id est $CE<CF$, radices aequationis erunt imaginariae: hinc recta AB, quae tunc abit in QR, nusquam occurret circuli peripheriae.

363. *Coroll.* 1. E gradu tamen nouae huius aequationis rite infertur nunquam esse maiorem interfectionum numerum maximo eiusdem exponente: adeoque duas quasuis sectiones conicas non posse sibi occurrere in pluribus, quam quatuor punctis, cum aequatio ex iis oriunda sit ad summum quarti gradus, quae tamen saepe ad tertium, vel etiam secundum deprimi possit.

E. g.

E. g. Sint duae aequationes communes coordinatas habentes, vna ad circulum $y^2+x^2-2bx=0$, altera ad parabolam $y^2-ax=0$; erit e secunda $x=\frac{y^2}{a}$, quo valore in prima substituto fiet $y^2+\frac{y^4}{a^2}-\frac{2by^2}{a}=y^4+a^2y^2-2aby^2=0$, vnde parabolam et circulum in quatuor punctis posse sibi occurrere perspicuum est. Quia tamen ob defectum duorum postremorum terminorum duae radices aequantur nihilo, aequatio facta per $y^2=0$ diuisione reducitur ad $y^2+a^2-2ab=0$. Si vero valor y^2 erutus e prima aequatione substituatur in secunda, erit $ax+x^2-2bx=0$, seu $x+a-2b=0$, quae aequatio est primi gradus.

At si fuerint hae duae aequationes $y^2+x^2-2ay-2bx+b^2-c^2=0$ ad circulum, et $y^2-dx=0$ ad parabolam, erit ex hac $x=\frac{y^2}{d}$, quo valore in prima substituto fiet $y^2+\frac{y^4}{d^2}-2ay-\frac{2by^2}{d}+b^2-c^2$, seu $d^2y^2+y^4-2ad^2y-2bd^2y+b^2d^2-c^2d^2=0$, id est $y^4+(d^2-2bd)y^2-2ad^2y+b^2d^2-c^2d^2=0$, quae aequatio deprimi nequit, et habet quatuor radices reales; duas scilicet positiuas QM et QM, ac duas negatiuas *qm* et *qm*. Similiter si e secunda valor $y^2=dx$ substituatur in prima, erit $dx+x^2-2a\sqrt{dx}-2bx+b^2-c^2=0$, quae aequatio pariter est quarti gradus, ad quem nempe adsurgit irrationalitate sublata. Fig. 161.

364. *Coroll.* 2. Duo circuli nonnisi in duobus punctis possunt se intersecare. Assumantur enim quaeuis duae aequationes ad circulum $y^2-2ax+x^2=0$, et $y^2-2cx+x^2+2ac+a^2=0$; non acquiretur aequatio, nisi secundi gradus, si valor x e prima erutus substituatur in secunda. Si vero valor y^2 e prima erutus substituatur in secunda, obueniet aequatio primi gradus. Quare duo circuli combinati nequeunt adhiberi ad construendas aequationes nisi secundi gradus, vt amplius patebit in se-

quentibus, quibus conſtruendis ſufficit recta cum circulo, vel cum ſingulis ſectionibus conicis, vti ſupra vidimus.

365. Ex hactenus dictis ſponte iam conſequitur, ad habendas communes duorum locorum combinatorum interſectiones non ſufficere numerum radicum aequationis determinatae ex iiſdem reſultantis, ſed valorem ipſum radicum eruendum eſſe, totque fore interſectiones, quot fuerint radices reales. Quodſi in binorum locorum aequationibus coordinata y vltra primam potentiam non aſſurgat, cuiuis abſciſſae x reſpondebit vnus valor y realis, cum in eius expreſſione nunquam ingrediatur ſignum radicale: hinc quaeuis coordinata y determinata per x et per conſtantes vnum interſectionis punctum exhibebit. Similiter ſi coordinata x vltra primum gradum non aſſurgat, quaelibet x determinata per y et per conſtantes determinabit vnum punctum interſectionis.

E. g. Si combinanda fuerint loca $y^2 + 2ax = 0$, et $y^2 + 4x^2 - 10ax - 16a^2 = 0$, in ſecunda aequatione pro y^2 ponendo e prima valorem $-2ax$ fiat $4x^2 - 12ax - 16a^2 = 0$, ſeu $x^2 - 3ax - 4a^2 = 0$, vnde $x = 4a$, et $x = -a$. (130). Subſtituatur iam in datis locorum aequationibus $4a$ pro x, erit prima $y^2 + 8a^2 = 0$, ſecunda itidem $y^2 + 8a^2 = 0$, vbi radices $y = \pm 2a\sqrt{-2}$ imaginariae nullum exhibent interſectionis punctum. At ſi in vtraque pro x ponatur ſecundus eiuſdem valor $-a$, ambae abibunt in $y^2 - 2a^2 = 0$, vbi radices $y = \pm a\sqrt{2}$ ambae reales duo deſignant interſectionum puncta reſpondentia abſciſſae $-a$.

Sint aequationes locorum combinandorum $ay - bx = 0$, et $y^2 + x^2 - 2dx - 2cx + c^2 + 2cd = 0$, quarum prior eſt ad rectam, poſterior ad circulum: valor $x = \frac{ay}{b}$ e prima erutus ſubſtituatur in ſecunda, fiat $y^2 - 2ab\frac{(c+d)}{a^2+b^2}y + b^2c\frac{(c+2d)}{a^2+b^2} = 0$, ſeu

$y^2 - 2ab\frac{(c+d)}{a^2+b^2}y = -b^2c\frac{(c+2d)}{a^2+b^2}$; tum complendo quadratum, ac radicem extrahendo erit $y = \frac{ab(c+d)}{a^2+b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2b^2(c+d)^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{b^2c(c+2d)}{a^2+b^2}\right)}$, qui valores reales sunt, si primum membrum radicale secundo maius, vel aequale sit: secus imaginarii.

Sint aequationes locorum combinandorum $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, et $y^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 x^2 - (a-b)^2 = 0$. In his siue x siue y eliminetur, aequatio determinata ex eliminatione resultans semper duas tantum habebit radices. E. g. si velimus y eliminare, erit $y^2 = a^2 - x^2$, et $y^2 = a^2 - 2ab + b^2 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 x^2$, et hinc $a^2 - x^2 = a^2 - 2ab + b^2 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 x^2$, seu $-x^2 = -2ab + b^2 - \frac{a^2x^2 + 2abx^2 - b^2x^2}{(a+b)^2}$, ac fractionem tollendo $-a^2x^2 - 2abx^2 - b^2x^2 = (-2ab + b^2) \times (a+b)^2 - a^2x^2 + 2abx^2 - b^2x^2$, vnde $4ax^2 = (2a-b) \times (a+b)^2$, et $x^2 = (a+b)^2 \times \frac{(2a-b)}{4a} = (a+b)^2 \times \frac{(2a^2-ab)}{4a^2}$, adeoque $x = \pm\frac{(a+b)}{2a}\sqrt{(2a^2-ab)}$: vtrique autem harum radicum duae respondent intersectiones, id quod deprehenditur, si valor vterque coordinatae x in vtraque aequatione substituatur; patebit enim coordinatae positiuae x respondere duas coordinatas reales y, alteram positiuam, alteram negatiuam; duas item respondere coordinatae negatiuae x: adeoque a quatuor realibus valoribus y quatuor intersectionum puncta indicari.

366. Dum vni eidemque coordinatae e. g. vni abscissae plura respondent intersectionum puncta e. g. plures ordinatae ambobus locis communes, tunc plura habebuntur intersectionum puncta, quam sint radices reales aequationis per x et constantes determinatae; adeoque in errorem induceretur, qui

numerum interſectionum e numero radicum realium metiretur, vt ſi in poſtremo exemplo e binario radicum realium numero binas duntaxat haberi interſectiones concluderet.

367. Error autem iſte ſemper euitari poterit, ac deueniri ad aequationem determinatam tot habentem radices reales, quot ſunt puncta interſectionum, ſi loco propoſitarum binarum aequationum adhibeantur aequationes generales completae, quales ſunt $Ay^2+By+C=0$, et $Dy^2+Ey+F=0$, in quibus coordinata y ad eundem aſſurgit gradum, ad quem in binis illis, e quibus eliminanda eſt, et quantitates A, B, C, D, E, F deſignant quaſuis functiones rationales coordinatae x. Quodſi ex his aequationibus generalibus eliminetur y, deuenietur ad aequationem $(A\times F-C\times D)^2+(A\times E-B\times D)\times(C\times E-B\times F)=0$ habentem tot radices, quot ſunt interſectionum puncta, vbi ſi pro functionibus A, B, C etc. ſubſtituantur valores e propoſitis duabus aequationibus eruti, obtinebitur aequatio determinata tot radicum realium, quoties duo propoſita loca ſibi occurrere poſſunt.

E. g. Si proponantur aequationes exempli poſtremi ſuperioris, facta cum his generalibus comparatione erit A et $D=1$, B et $E=0$, $C=x^2-a^2$, $F=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2x^2-(a-b)^2$, quibus valoribus in aequatione $(A\times F-C\times D)^2+(A\times E-B\times D)\times(C\times E-B\times F)$ ſubſtitutis, et conſuetis reductionibus adhibitis, erit $\frac{16a^2b^2}{(a+b)^4}x^4-\frac{8ab(2ab-b^2)}{(a+b)^2}x^2+(2ab-b^2)^2=0$, vbi quatuor radices indicant totidem puncta interſectionum: ac ſi aequatio per b^2 diuidatur, prodibit quadratum aequationis iam ſupra inuentae $4ax^2-(2a-b)\times(a+b)^2=0$, ſeu $\frac{4a}{(a+b)^2}x^2-(2a-b)=0$; cuius radicum $\pm\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2a^2-ab)}$ quaelibet eſt duplex, et cuiuis valori x duae reſpondent interſectiones.

Scholion. Quoniam ex hactenus dictis adparet interdum plures, interdum pauciores haberi locorum combinatorum intersectiones, quam sit numerus radicum realium aequationis determinatae resultantis ex eliminatione alterutrius coordinatae, incommodum istuc euitabitur, si coordinata eliminanda e. g. y in alterutra aequatione vltra primam potentiam non assurgat; tunc enim cuiuis coordinatae x respondebit vnica coordinata realis y (365), adeoque tot praecise erunt intersectiones, quot radices reales.

CAPVT II.

De combinatione duorum locorum geometricorum ad obtinendas constructiones aequationum tertii, et quarti gradus.

368. Dum aequatio quaecunque tertii vel quarti gradus construenda proponitur, res tota in eo vertitur, vt eligantur binae aequationes indeterminatae, quas *locales* dicimus, eiusmodi, vt si ope earundem eliminetur incognita, quae deest in proposita aequatione, aequatio determinata inde resultans sit ipsissima aequatio ad construendum proposita. Aequationum id genus localium combinatione absoluetur desiderata constructio.

E. g. Si inter duas rectas a et b quaerantur duae mediae proportionales, quarum prima sit $=y$, erit secunda $=\frac{y^2}{a}$ cum sit $a:y=y:\frac{y^2}{a}$; quare erit $a:y=\frac{y^2}{a}:b$, vnde $y^3=a^2b$. Vt iam haec aequatio construatur, combinari debent duae aequationes locales indeterminatae, continentes duas incognitas x et y, quae quidem eiusmodi sint, vt si ex vtrauis ope alterius eliminetur x, semper restituatur aequatio proposita $y^3=a^2b$: hae autem sic inuenientur. Sit secunda e mediis proportionalibus $=x$, erit $a:y=$

$y : x$, vnde 1) $ax = y^2$; item $y : x = x : b$, vnde 2) $x^2 = by$, quarum vtraque eliminato x reſtituet aequationem propoſitam. Si enim e prima valor $x = \frac{y^2}{a}$ ſubſtituatur in ſecunda, fiet $\frac{y^4}{a^2} = by$, ſeu $y^3 = a^2 b$: et ſi e ſecunda valor $x = \sqrt{by}$ ſubſtituatur in prima, fiet $a\sqrt{by} = y^2$, ſeu $a^2 by = y^4$, et hinc $y^3 = a^2 b$.

369. Inuentio autem localium huiuſmodi aequationum nihil habet difficultatis. Nempe vna earum fere aſſumitur ad libitum, vel elicitur ſoluendo aequationem propoſitam in proportionem, cuius terminus primus ſit quantitas quaedam conſtans, terminus ſecundus ſit incognita aequationis propoſitae, tertius ſit noua incognita, ſeu indeterminata introducenda: deinde ex hac proportione fit aequatio, e qua eliciuntur valores y, y^2, y^3 etc. per x et conſtantes, aut contra x, x^2, x^3 etc. per y et conſtantes; tum hi valores ſubſtituuntur in vno, vel in pluribus terminis aequationis propoſitae, quae proinde mutatur in aliam indeterminatam, quae tamen cum aſſumta, vel e dicta proportione elicita reſtituit propoſitam incognita vna eliminata. Poſſunt etiam inuentae duae aequationes locales inter ſe addi, ſubtrahi, multiplicari etc. atque ita plures earum inueniri, quarum binae quaeuis combinatae reſtituant aequationem ad conſtructionem propoſitam.

E. g. In exemplo ſuperiore $y^3 = a^2 b$ aſſumi ad libitum poteſt aequatio quaecunque localis 1) $ax = y^2$, deinde in propoſita hic valor pro y^2 ſubſtitui, eritque 2) $xy = ab$. Poſſunt hae duae inter ſe multiplicari, vnde obueniet 3) $x^2 = by$: poſſunt eaedem inter ſe addi, et erit 4) $ax + xy = y^2 + ab$; vel poſſunt ſubtrahi, et erit 5) $ax - xy = y^2 - ab$. Poſſunt ſecunda et tertia addi, et habebitur 6) $xy + x^2 = ab + by$; vel ſubtrahi, et erit 7) $xy - x^2 = ab - by$. Idem poteſt fieri cum reliquis. Poteſt etiam vna

earum multiplicari vel diuidi per aliquam quantitatem, et producto vel quoto addi aut demi quaeuis ex reliquis: sic prima per m multiplicata erit $max = my^2$, cui addendo secundam habebitur $max + xy = my^2 + ab$, et sic porro.

370. Postquam aequatione ad construendum proposita, locales huiusmodi aequationes inuentae sunt, e criteriis alibi iam traditis sedulo dispiciendum erit, ad quamnam sectionem conicam quaelibet earum sit; tum ex iis ad constructionem deligantur duae, et quidem prae ceteris eae, quae curuas exhibent facilioris descriptionis: vnde passim assumi solet vna e localibus, quae sit ad circulum, cuius descriptio est omnium facillima.

E. g. Si proponatur construenda aequatio $y^4 + (d^2 - 2bd)y^2 - 2ad^2y + (b^2 - c^2)d^2 = 0$, erit $y^4 = 2ad^2y - (d^2 - 2bd)y^2 - (b^2 - c^2)d^2$, vnde exsistit haec proportio $d : y = y^3 : 2ady - (d - 2b)y^2 - (b^2 - c^2)d$. Fiat ergo $d : y = y : x$, erit 1) $y^2 = dx$, seu $y^2 - dx = 0$ *ad parabolam*. Erit item $y : x = y^3 : 2ady - (d - 2b)y^2 - (b^2 - c^2)d$, seu $1 : x = y^2 : 2ady - (d - 2b)y^2 - (b^2 - c^2)d$, vnde $xy^2 = 2ady - (d - 2b)y^2 - (b^2 - c^2)d$, ac pro y^2 e prima ponendo dx erit $dx^2 + (d - 2b)dx = 2ady - (b^2 - c^2)d$, et per d diuidendo, ac omnia transponendo erit 2) $y^2 + x^2 - 2ay - 2bx + b^2 - c^2 = 0$ *ad circulum*. Si secunda tollatur a duplo primae, erit 3) $y^2 - x^2 + 2ay + (2b - 2d)x + c^2 - b^2 = 0$ *ad hyperbolam aequil.* Si proposita aequatio in aliam soluatur proportionem, cum sit $y^4 + (d^2 - 2bd)y^2 = 2ad^2y - (b^2 - c^2)d^2$, erit $d^2 : y^2 = y^2 + (d^2 - 2bd) : 2ay - b^2 + c^2$; cumque supra fuerit $d : y = y : x$, erit $d^2 : y^2 = d : x$, et hinc $d : x = y^2 + (d^2 - 2bd) : 2ay - b^2 + c^2$, vnde pro y^2 ponendo dx erit $dx^2 + (d^2 - 2bd)x = 2ady - b^2d + dc^2$, ac omnia diuidendo per d, et transponendo erit 4) $x^2 - 2ay + (d - 2b)x + b^2 - c^2 = 0$ *ad parabolam*, et sic deinceps.

Scholion. Ne tamen localium huiuſmodi aequationum in caſu quouis ſpeciali indagatio moleſta tironi accidat, addemus hoc loco problema, quo inuenientur formulae quaedam locales vniuerſales facilioris deſcriptionis, quibus vti licebit in caſu quouis particulari, quemadmodum adparebit in ſequentibus.

371. *Probl. Inuenire formulas locales vniuerſales, quarum ope quaeuis aequatio tertii, et quarti gradus conſtrui poſſit.*

Reſol. Si literae n, r, p, q repraeſentent quoſuis terminorum aequationis coefficientes; quaeuis aequatio tertii gradus ducta in ſuam radicem nihilo aequalem repraeſentari poterit per $y^4+ny^3+py^2+qy=0$; et quaeuis aequatio quarti gradus per $y^4+ny^3+py^2+qy+r=0$. Capiatur iam in prima vnus e diuiſoribus termini vltimi qy pro vnitate aſſumtus, et ſit $=a$, fiatque $a:y=y+\frac{1}{2}n:x$, erit 1) $ax=y^2+\frac{1}{2}ny$, ſeu $y^2+\frac{1}{2}ny-ax=0$ *ad parabolam*, cuius membra eleuando ad quadratum erit $a^2x^2=y^4+ny^3+\frac{1}{4}n^2y^2$, ſeu $a^2x^2+\frac{1}{4}n^2y^2=y^4+ny^3$, quo valore in formula generali pro primis duobus terminis ſubſtituto erit $a^2x^2-\frac{1}{4}n^2y^2+py^2+qy=0$, ac pro y^2 ponendo eius valorem $ax-\frac{1}{2}ny$ e prima locali, erit $a^2x^2-\frac{1}{4}n^2ax+\frac{1}{8}n^3y+apx-\frac{1}{2}npy+qy=0$, ac per a^2 diuidendo erit 2) $x^2-\frac{n^2}{4a}x+\frac{n^3}{8a^2}y+\frac{p}{a}x-\frac{np}{2a^2}y+\frac{q}{a^2}y=0$ *ad parabolam.* Porro duas has inuentas addendo naſcetur tertia ad circulum, et primam e ſecunda tollendo obueniet quarta ad hyperbolam aequilateram. Habebuntur adeo quatuor vniuerſales aequationes locales pro aequationibus quibuſuis tertii gradus, nempe

1) y^2+

1) $y^2 + \frac{1}{2}ny - ax = 0$ *ad Parabolam.*

2) $x^2 - \left\{\begin{matrix} \frac{n^2}{4a} \\ + \frac{p}{a} \end{matrix}\right\} x + \left\{\begin{matrix} \frac{n^3}{8a^2} \\ - \frac{np}{2a^2} \\ + \frac{q}{a^2} \end{matrix}\right\} y = 0$ *ad Parabolam.*

3) $x^2 + y^2 - \left\{\begin{matrix} \frac{n^2}{4a} \\ + \frac{p}{a} \\ - a \end{matrix}\right\} x + \left\{\begin{matrix} \frac{n^3}{8a^2} \\ - \frac{np}{2a^2} \\ + \frac{q}{a^2} \\ + \frac{1}{2}n \end{matrix}\right\} y = 0$ *ad Circulum.*

4) $x^2 - y^2 - \left\{\begin{matrix} \frac{n^2}{4a} \\ + \frac{p}{a} \\ + a \end{matrix}\right\} x + \left\{\begin{matrix} \frac{n^3}{8a^2} \\ - \frac{np}{2a^2} \\ + \frac{q}{a^2} \\ - \frac{1}{2}n \end{matrix}\right\} y = 0$ *ad Hyperb. aequil.*

Eodem plane modo pro formula generali secunda aequationum quarti gradus inueniuntur aequationes locales, nempe

1) $y^2 + \frac{1}{2}ny - ax = 0$ *ad Parabolam.*

2) $x^2 - \left\{\begin{matrix} \frac{n^2}{4a} \\ + \frac{p}{a} \end{matrix}\right\} x + \left\{\begin{matrix} \frac{n^3}{8a^2} \\ - \frac{np}{2a^2} \\ + \frac{q}{a^2} \end{matrix}\right\} y + r = 0$ *ad Parabolam.*

3) $x^2+y^2 \left\{\begin{matrix} -\frac{n}{4a^2} \\ +\frac{q}{a} \\ -a \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +\frac{n^3}{8a^2} \\ -\frac{np}{2a^2} \\ +\frac{q}{a^2} \\ +\frac{1}{2}n \end{matrix}\right\} y \quad +r=0$ *ad Circulum.*

4) $x^2-y^2 \left\{\begin{matrix} -\frac{n^2}{4a} \\ +\frac{p}{a} \\ +a \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +\frac{n^3}{8a^2} \\ -\frac{np}{2a^2} \\ +\frac{q}{a^2} \\ -\frac{1}{2}n \end{matrix}\right\} y \quad +r=0$ *ad Hyperb. aequil.*

372. *Coroll.* 1. Quodsi iam aequatio propoſita tertii vel quarti gradus omnes ſuos terminos habeat, et in omnibus ſignum +, vt ope harum formularum obtineantur aequationes eiuſdem locales, non alia re opus eſt, quam vt pro quantitatibus n, p, q, r ſubſtituantur earundem valores ex aequatione propoſita.

373. *Coroll.* 2. Si in propoſita aequatione terminus aliquis e. g. ſecundus negatiuus fuerit, in omnibus harum formularum terminis, in quibus coefficientis n occurrit potentia exponentis imparis, ſignum contrarium erit ponendum: idem obſeruandum in aliis terminis reſpectu quantitatum p, q, r.

374. *Coroll.* 3. Siquis terminus deſit in propoſita aequatione, in formulis localibus omittendi erunt omnes illi termini, in quibus occurrit coefficiens termini deficientis. E. g. ſi deſit terminus ſecundus, omittendi erunt omnes termini, in quibus comparet quantitas n.

375. *Coroll.* 4. Denique ſi incognita propoſitae aequationis non eſſet y, ſed x, in formulis localibus pro y vbique poni deberet x, et viciſſim y pro x. Hoc pacto obtinentur aequa-

tiones locales ſpeciales pro quauis aequatione particulari tertii vel quarti gradus.

376. Inuentis aequationibus localibus ſequitur earundem combinatio. Igitur deligantur duae ex iiſdem facilioris, vt dixi, conſtructionis, ac ſeorſim conſtruantur: deinde loca conſtructa ita componantur, vt communes acquirant coordinatas; locorum ſic coniunctorum mutuae interſectiones determinabunt radices aequationis propoſitae.

E. g. in exemplo ſuperiore (368) proponebatur conſtruenda aequatio $y^3 = a^2 b$, cuius duae locales ibidem erant $y^2 =$ Fig. 162. ax, et $x^2 = by$ ambae ad parabolam, et prior quidem ad concauam, poſterior ad conuexam. Quare parametro a deſcribatur prior parabola CAM circa axem AN, et parametro b poſterior parabola BAM circa axem AQ, ita vt in vtraque eadem ſit origo abſciſſarum A, iidem axes coordinatarum AN et AQ, tum e communi earundem interſectione M ducatur ordinata MP, erit haec $= y$, ſeu radix aequationis propoſitae $y^3 = a^2 b$; cumque x repraeſentet ſecundam mediam proportionalem, erit haec abſciſſa AP, vt adeo inter parametros parabolarum a et b mediae proportionales quaeſitae ſint PM et PA.

Cum enim $x =$ AP, et $y =$ PM ſint communes coordinatae vtrique parabolae, earum relatio pro omnibus parabolae primae punctis exprimitur aequatione $y^2 = ax$, et pro omnibus parabolae ſecundae punctis exprimitur aequatione $x^2 = by$: ergo in puncto M vtrique parabolae communi earundem relatio exprimitur vtraque illa aequatione. Quare hae coordinatae reſpectu puncti M ceſſant eſſe variabiles, et determinantur per aequationes $y^3 = a^2 b$, et $x^3 = ab^2$, quae reſultant ex eliminatione x aut y. Et ſane cum prima parabola repraeſentetur aequatione $y^2 = ax$, ſeu proportione $a : y = y : x$, pro quouis eius puncto ordinata y ſemper eſt

media proportionalis inter parametrum a, et abſciſſam x: ſimiliter pro quouis ſecundae parabolae puncto abſciſſa x ſemper eſt media proportionalis inter eius ordinatam y, et parametrum b: ergo in puncto M vtrique parabolae communi ambae hae proportiones obtinent $a : y = y : x$, et $y : x = x : b$ id eſt rectae PM et PA ſunt mediae proportionales quaeſitae inter rectas a et b.

CAPVT III.

De Conſtructione aequationum tertii, et quarti gradus.

377. *Probl. Conſtruere aequationem* $y^3 - aby - a^2c = 0$.

Reſol. Multiplicando datam aequationem per $y = 0$, erit $y^4 - aby^2 - a^2cy = 0$, vbi deeſt ſecundus terminus, ac proinde in formulis localibus omittendi erunt omnes termini, in quibus adeſt n. Ad haec cum termini tertius et quartus negatiui ſint, mutandum eſt ſignum in omnibus terminis, in quibus quantitatum p et q occurrunt potentiae exponentis imparis. Denique pro p ponatur ab, pro q vero a^2c, ac pro a ſeu pro vnitate ponatur a, qui eſt inter diuiſores termini vltimi a^2c: hoc pacto obuenient ſequentes aequationes locales

1) $y^2 - ax = 0$ *ad Parabolam.*

2) $x^2 - bx - cy = 0$ *ad Parabolam.*

Fig. 163. 3) $x^2 + y^2 - bx - ax - cy = 0$ *ad Circulum,*

4) $x^2 - y^2 - bx + ax - cy = 0$ *ad Hyperb. aequil.*

Conſtruamus iam ſeorſim primam, et tertiam. Et pro prima quidem ducatur recta indefinita AB, circa quam tanquam axem parametro a deſcribatur parabola MAH, erit ea locus aequationis $y^2 = ax$, et $AP = x$, $PM = y$.

Tertia aequatio tranſponendo abit in hanc $x^2 - bx - ax = cy - y^2$, et complendo quadratum fiet $x^2 - bx - ax + (-\frac{1}{2}b$

$-\frac{1}{2}a)^2 = cy - y^2 + (-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)^2$. Fiat primi membri radix $x - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a = p$, erit facta tranſpoſitione $y^2 - cy = (-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)^2 - p^2$, et rurſus in primo membro complendo quadratum $y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 + (-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)^2 - p^2$. Fiat primi membri radix $y - \frac{1}{2}c = q$, erit $q^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 - p^2$: quare circuli deſcribendi radius eſt $\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2)}$, qui idem elicitur comparando aequationem propoſitam cum formula generali circuli (275).

Igitur ſuper recta quapiam indefinita capiatur $AD = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, ac ex D erigatur perpendiculum $DC = \frac{1}{2}c$, erit hypotenuſa $AC = \sqrt{(DC^2 + AD^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2)}$: quare ſi radio CA deſcribatur circulus, et ex A ducatur chorda AT parallela ad DC, erit arcus TMB locus radicum ſeu coordinatarum poſitiuarum aequationis tertiae ad circulum. Aſſumta enim quauis abſciſſa $AP = x$, et ordinata $PM = y$, erit $RM = PM - DC = y - \frac{1}{2}c$, et $CR = AP - AD = x - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, vel $= AD - AP = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - x$ ſi punctum P cadat inter A et D: eſt autem $RM^2 = CG^2 - CR^2$, ſeu $y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 - x^2 + bx - \frac{1}{4}b^2 + ax - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a^2$, ſeu $x^2 + y^2 - bx - ax - cy = 0$, quae fuit aequatio localis ad circulum. Fig. 164.

Vt iam combinemus vtrumque locum ſeorſim conſtructum, imponatur circulus parabolae, ita vt puncta originum A et A, item axes abſciſſarum AB et AB congruant. Quia propoſitam aequationem multiplicauimus per $y = 0$, ea nacta eſt vnam radicem y aequalem nihilo, adeoque circulus ſecabit parabolam imprimis in ipſa origine A, quae interſectio exhibebit radicem illam introductam $y = 0$; ſecabit deinde in tribus aliis punctis M, m, m, eritque PM radix poſitiua, pm et pm radices negatiuae aequationis propoſitae. Erit enim radius $CM = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab}$ Fig. 163.

$+\frac{1}{4}a^2$), et AP in parabola $=\frac{y^2}{a}$, vnde $CR=AP-AD=\frac{y^2}{a}-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, et $RM=PM-DC=y-\frac{1}{2}c$; atqui $CM^2=RM^2+CR^2$: ergo $\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2=y^2-cy+\frac{1}{4}c^2+\frac{y^4}{a^2}-\frac{by^2}{a}+\frac{1}{4}b^2-y^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2$, seu $\frac{y^4}{a^2}-\frac{by^2}{a}-cy=0$, ac omnia per a^2 multiplicando, et per y diuidendo $y^3-aby-a^2c=0$, quae est aequatio ad constructionem proposita. Eodem modo probabit tiro rite inuentas esse radices negatiuas *pm* et *pm*.

378. *Probl. Construere aequationem* $x^3+ax^2-abx-a^2c=0$.

Resol. Multiplicando aequationem per $x=0$ fiet $x^4+ax^3-abx^2-a^2cx=0$, vbi cum duo postremi termini negatiui sint, in formulis vniuersalibus ponatur signum — in terminis, vbi quantitates p et q occurrunt; item pro y vbique ponatur x, et y pro x, substituanturque pro n, p, q valores e data aequatione, et pro a ponatur c, qui est diuisor termini vltimi aequiualens vnitati: hoc pacto obuenient aequationes locales

1) $x^2+\frac{1}{2}ax-cy=0$ *ad Parabolam.*

2) $y^2\left\{\begin{matrix}-\frac{a^2}{4c}\\-\frac{ab}{c}\end{matrix}\right\}y\left\{\begin{matrix}+\frac{a^3}{8c^2}\\+\frac{a^2b}{2c^2}\\-\frac{a^2}{c}\end{matrix}\right\}x=0$ *ad Parabolam.*

3) $y^2+x^2\left\{\begin{matrix}-\frac{a^2}{4c}\\-\frac{ab}{c}\\-c\end{matrix}\right\}y\left\{\begin{matrix}+\frac{a^3}{8c^2}\\+\frac{a^2b}{2c^2}\\-\frac{a^2}{c}\\+\frac{1}{2}a\end{matrix}\right\}x=0$ *ad Circulum.*

$$4)y^2 - x^2 \begin{Bmatrix} -\frac{a^2}{4c} \\ -\frac{ab}{c} \\ +c \end{Bmatrix} y \quad \begin{Bmatrix} +\frac{a^3}{8c^2} \\ +\frac{a^2b}{2c^2} \\ -\frac{a^2}{c} \\ -\frac{1}{2}a \end{Bmatrix} x = 0 \text{ ad Hyperb. aequil.}$$

Conſtruamus iam ſeorſim primam, et tertiam. Erit ergo e prima $x^2 + \frac{1}{2}ax = cy$, et complendo quadratum $x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{a^2}{16} = cy + \frac{a^2}{16} = cy + \frac{a^2c}{16c}$. Fiat membri primi radix $x + \frac{1}{4}a = p$, et $y + \frac{a^2}{16c} = q$ erit $p^2 = qc$. Quare ſuper recta indefinita PD capiatur $AN = \frac{1}{4}a$, ac erigatur perpendiculum $NK = \frac{a^2}{16c}$, circa quod indefinite productum vertice K, parametro c deſcribatur parabola QKR, erit arcus eiuſdem indefinitus AR locus radicum poſitiuarum primae aequationis, ſeu ſumta quauis abſciſſa $AP = x$, erit ordinata $PM = y$. Erit enim $KF = PM + KN = y + \frac{a^2}{16c} = q$, et $FM = PN = AP + AN = x + \frac{1}{4}a = p$: quare cum fit $p^2 = cq$, erit $x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{a^2}{16} = cy + \frac{a^2c}{16c} = cy + \frac{a^2}{16}$, et hinc $x^2 + \frac{1}{2}ax - cy = 0$, quae eſt aequatio localis prima ad conſtruendum propoſita. Simul autem patet tranſire parabolam per originem abſciſſarum A: eſt enim $NA^2 = NK \times c$, ſeu $\frac{a^2}{16} = \frac{a^2c}{16c} = \frac{a^2}{16}$, adeoque NA eſt ordinata, et punctum A in parabola. Fig. 165.

Tertia aequatio localis tranſponendo abit in hanc

$$y^2 - \frac{a^2}{4c}y \quad \begin{matrix} -\frac{a^3}{8c^2}x \\ -\frac{a^2b}{2c^2}x \\ +\frac{a^2}{c}x \\ -\frac{1}{2}ax \end{matrix} = -x^2 \begin{matrix} \\ -\frac{ab}{c}y \\ -cy \end{matrix}$$

Si iam compleatur quadratum imprimis in membro primo, ac eiusdem radix $y-\frac{a^2}{8c}-\frac{ab}{2c}-\frac{1}{2}c$ fit $=p$; deinde compleatur quadratum etiam in secundo membro, ac eius radix $x+\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a$ ponatur $=q$ erit $p^2=\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)^2+\left(-\frac{a^2}{8c}-\frac{ab}{2c}-\frac{1}{2}c\right)^2-q^2$, id est $p^2=\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)^2+\left(\frac{a^2}{8c}+\frac{ab}{2c}+\frac{1}{2}c\right)^2-q^2$, vbi euidens est quadratum radii circuli esse $\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)^2+\left(\frac{a^2}{8c}+\frac{ab}{2c}+\frac{1}{2}c\right)^2$. Cum ergo abscissarum origo debeat esse in A, fiat $AD=\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a$, et perpendiculum $DC=\frac{a^2}{8c}+\frac{ab}{2c}+\frac{1}{2}c$, erit hypotenusa AC radius circuli describendi, qui est locus aequationis localis tertiae, in quo sumta quauis abscissa $AP=x$, erit ordinata $PM=y$. Erit enim $MS=PM-CD=y-\frac{a^2}{8c}-\frac{ab}{2c}-\frac{1}{2}c$, et $CS=AP+AD=x+\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a$; atqui $SM^2=CT^2-CS^2$: erit adeo $\left(y-\frac{a^2}{8c}-\frac{ab}{2c}-\frac{1}{2}c\right)^2=\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)^2+\left(\frac{a^2}{8c}+\frac{ab}{2c}+\frac{1}{2}c\right)^2-\left(x+\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)^2$, seu $y^2+2y\left(-\frac{a^2}{8c}-\frac{ab}{2c}-\frac{1}{2}c\right)+\left(\frac{a^2}{8c}+\frac{ab}{2c}+\frac{1}{2}c\right)^2=\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)^2+\left(\frac{a^2}{8c}+\frac{ab}{2c}+\frac{1}{4}c\right)^2-x^2-2x\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)-\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)^2$, ac tollendo vtrinque aequalia, et quae se destruunt, omittendo erit $y^2+2y\left(-\frac{a^2}{8c}-\frac{ab}{2c}-\frac{1}{2}c\right)=-x^2-2x\left(\frac{a^3}{16c^2}+\frac{a^2b}{4c^2}-\frac{a^2}{2c}+\frac{1}{4}a\right)$,

hoc

hoc est, $y^2 - \frac{a^2y}{4c} - \frac{aby}{c} - cy = -x^3 - \frac{a^3x}{8c^2} - \frac{a^2bx}{2c^2} + \frac{a^2x}{c} - \frac{1}{2}ax$, vbi omnia transponendo obueniet aequatio localis ad construendum proposita.

Combinando iam duo haec loca, ac e punctis intersectionum demittendo ordinatas MG, *mg*, *mg*, erit MG radix positiua, *mg* et *mg* radices negatiuae aequationis propositae. Est enim in circulo $SM^2 = CT^2 - CS^2$, vbi si pro y substituatur valor $\frac{x^2}{c} + \frac{ax}{2c}$ desumtus ex aequatione ad parabolam, restituetur aequatio ad construendum proposita.

379. *Construere aequationem* $x^3 - 3a^2x + 5a^3 = 0$.

Resol. Hactenus multiplicauimus aequationem propositam per radicem eiusdem aequalem nihilo, vt scilicet loca combinata sese in ipsa origine abscissarum intersecarent: multiplicemus praesentem per $x = -2a$, seu per $x + 2a = 0$, fiet $x^4 + 2ax^3 - 3a^2x^2 - a^3x + 10a^4 = 0$. Adhibitis pro more substitutionibus in aequationibus localibus vniuersalibus erit prima $x^2 + ax - ay = 0$ ad parabolam, tertia $y^2 + x^2 - 5ay + 4ax + 10a^2 = 0$ ad circulum.

Construamus imprimis circulum, ad quem facta transpositione erit $y^2 - 5ay = -10a^2 - x^2 - 4ax$: tum complendo quadratum in membro primo $y^2 - 5ay + \frac{25a^2}{4} = \frac{25a^2}{4} - 10a^2 - x^2 - 4ax = -\frac{15a^2}{4} - x^2 - 4ax$. Fiat primi membri radix $y - \frac{5}{2}a = q$, erit $q^2 = -\frac{15a^2}{4} - x^2 - 4ax$, seu $x^2 + 4ax = -\frac{15a^2}{4} - q^2$, et rursus in membro primo quadratum complendo $x^2 + 4ax + 4a^2 = 4a^2 - \frac{15a^2}{4} - q^2 = \frac{1}{4}a^2 - q^2$. Fiat denuo primi membri radix $x + 2a = p$, erit $p^2 = \frac{1}{4}a^2 - q^2$: est adeo radius

circuli deſcribendi $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, qui idem fuiſſet erutus etiam comparando praeſentem aequationem cum formula generali circuli (275). Igitur radio $AC = \frac{1}{2}a$ deſcribatur circulus, ac in producto radio capiatur $AD = 2a$, et fiat perpendiculum $DE = AD = 2a$, ac per E ducatur recta indefinita ER ad AD parallela, in qua ſi aſſumatur quaeuis abſciſſa $EP = y$, erunt ordinatae PM et $PN = -x$. Erit enim $AO = DO - DA = y - 2a$, $OH = DH - DO = 3a - y$, $OM = PM - PO = -x - 2a$, vel $ON = PO - PN = 2a + x$; atqui $AO \times OH = OM^2 = ON^2$: ergo $3ay - 6a^2 - y^2 + 2ay = x^2 + 4ax + 4a^2$, et hinc $y^2 + x^2 - 5ay + 4ax + 10a^2 = 0$, quae eſt aequatio localis ad conſtruendum propoſita.

Fig. 166.

Ad parabolam tranſponendo erit $x^2 + ax = ay$, et quadratum complendo $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = ay + \frac{1}{4}a^2 = a(y + \frac{1}{4}a)$. Fiat primi membri radix $x + \frac{1}{2}a = p$, et $y + \frac{1}{4}a = q$, erit $p^2 = aq$; quare parameter deſcribendae parabolae eſt a, quae eadem eruitur etiam comparatione praeſentis aequationis cum formula generali parabolae (272). Fiat ergo $EG = \frac{1}{2}a$, et perpendiculum $GI = \frac{1}{4}a$; deinde vertice I circa axem IQ deſcribatur parabola, erit $IQ = EP + IG = y + \frac{1}{4}a = q$, et $QM = PM - EG = -x - \frac{1}{2}a = -p$; atqui $p^2 = aq$: ergo $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = ay + \frac{1}{4}a^2$, ſeu $x^2 + ax - ay = 0$, quae eſt aequatio localis ad conſtruendum aſſumta.

Loca hoc pacto deſcripta ſeſe interſecabunt in punctis A et M, eruntque aequationis propoſitae radices reales negatiuae BA et PM; at $BA = ED = 2a$ eſt radix multiplicando per $x + 2a$ introducta, adeoque ſola PM eſt radix realis aequationis conſtruendae $x^3 - 3a^2x + 5a^3 = 0$, reliquae eiuſdem radices imaginariae ſunt. Locum rite eſſe conſtructum patet: ſi enim in aequatione $AO \times OH = OM^2$ pro y et y^2 ſubſtituantur valores $\frac{x^2 + ax}{a}$, et $\frac{x^4 + 2ax^3 + a^2x^2}{a^2}$ eruti ex aequatione ad parabolam, obueniet $x^4 + 2ax^3 - 3a^2x^2$

$-a^3x+10a^4=0$, et per $x+2a$ diuidendo $x^3-3a^2x+5a^3=0$, quae eſt aequatio ad conſtruendum propoſita.

379. *Probl. Conſtruere aequationem* $x^3-a^2x+2a^3=0$.

Reſol. Facta per $x=0$ multiplicatione fiet $x^4-a^2x^2+2a^3x=0$. Iam in formulis localibus pro y ponendo x, et ceteris valoribus rite ſubſtitutis erit aequatio prima localis ad parabolam $x^2-ay=0$, tertia ad circulum $y^2+x^2-2ay+2ax=0$, cuius radius methodo iam toties in ſuperioribus adhibita, vel comparatione cum aequatione generali circuli eruitur $=\sqrt{2a^2}$.

Primum ergo circa rectam indefinitam AF parametro a deſcribatur parabola AM, et in A erigatur perpendiculum AD $=a$, ac per D ducatur recta indefinita DQ ad AF parallela, in DQ capiatur $DC=AD=a$, erit hypotenuſa $AC=\sqrt{2a^2}$, qua tanquam radio deſcriptus circulus erit locus aequationis localis ad circulum, in quo ſumta quauis abſciſſa $AP=y$, erit $PM=-x$. Erit enim $CQ=AP-CD=y-a$, et $QM=PM-AD=-x-a$; atqui in circulo $QM^2=CB^2-CQ^2$: ergo $x^2+2ax+a^2=2a^2-y^2+2ay-a^2$, ſeu $x^2+2ax+y^2-2ay=0$, quae eſt aſſumta aequatio localis ad circulum. Fig. 167.

Iam loca rite ſibi impoſita ſeſe interſecant in punctis A et M, eſtque radix realis aequationis propoſitae $PM=-x$, reliquae duae imaginariae ſunt: radix vero in A eſt $=0$, cum aequatio per $x=0$ multiplicata fuerit. Quodſi, vt in problemate praecedente multiplicata fuiſſet per x aequalem alicui quantitati reali, interſectio illa A, quae tunc non eſſet in origine abſciſſarum, exhiberet radicem illam multiplicatione introductam. Ceterum aequationem rite eſſe conſtructam patebit, ſi ex aequatione parabolae pro y ponatur valor $\frac{x^2}{a}$ in aequatione circuli; ita enim propoſita aequatio reſtituetur.

Scholion. 1. Iuuat in gratiam tironis aequationem eandem etiam ope duarum parabolarum conſtruere. Prima aequatio localis ad parabolam, vt vidimus, eſt $x^2 - ay = 0$; altera adhibitis in formula generali locali ſecunda debitis ſubſtitutionibus erit $y^2 - ay + 2ax = 0$, ſeu $y^2 - ay = -2ax$, et complendo quadratum $y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - 2ax = 2a(\frac{1}{8}a - x)$. Fiat primi membri radix $y - \frac{1}{2}a = q$, et $\frac{1}{8}a - x = p$, erit $q^2 = 2ap$. Igitur circa rectam indefinitam BF parametro $2a$ deſcribatur parabola ABM, fiatque $BD = \frac{1}{8}a$, et perpendiculum $DA = \frac{1}{2}a$, quod in parabola ABM terminabitur, cum ſit $DA^2 = 2a \times BD$, ſeu $\frac{1}{4}a^2 = \frac{2}{8}a^2 = \frac{1}{4}a^2$. Per A ducatur recta indefinita PH ad BF parallela, in qua ab A verſus H erunt abſciſſae poſitiuae, verſus P negatiuae, vtriſque autem ordinatae reſpondebunt poſitiuae. Sit enim $AP = -x$, $PM = y$, erit $BN = BD + AP = \frac{1}{8}a - x = p$, et $NM = PM - PN = y - \frac{1}{2}a = q$; atqui $q^2 = 2ap$: ergo $y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2 = \frac{2}{8}a^2 - 2ax$, et hinc $y^2 - ay + 2ax = 0$, quae eſt aequatio ſecunda localis aſſumta. Porro circa rectam AG vertice A, parametro a deſcribatur altera parabola BAM, in qua erit $GM^2 = a \times AG$, ſeu $x^2 = ay$, vnde $x^2 - ay = 0$; quae eſt aequatio localis prima aſſumta. Loca ſic conſtructa ſecabunt ſe in punctis A et M, eritque PM radix realis negatiua aequationis propoſitae, radix autem altera in A erit $= 0$, cum aequatio multiplicata fuerit per $x = 0$. Conſtructionem rite eſſe perfectam probabitur, vt ſupra.

Fig. 168.

Scholion. 2. Siquis vti nolit formulis generalibus localibus, conſtruere poterit ope parabolae, et hyperbolae intra aſymptotos omnes aequationes tertii gradus abſque reductione ad gradum quartum. Reſumamus idem exemplum. Aſſumatur ad libitum aequatio localis ad parabolam $x^2 = ay$, quo valore in data aequatione $x^3 - a^2x + 2a^3 = 0$ ſubſtituto fiet $axy - a^2x + 2a^3$

$=0$, seu $xy-ax+2a^2=0$, quae aequatio est ad hyperbolam intra asymptotos, vbi si fiat $y-a=q$, erit $qx=-2a^2$. Quare iunctis sub angulo recto lineis indefinitis QR et MN, fiant BA, et $Ba=a$, perpendicula AD, et $ad=2a$; tum intra asymptotos QR et MN per puncta D et d describantur hyperbolae oppositae, erit quaeuis abscissa $AP=y$, $PM=-x$. Nam erit $BP=AP-AB=y-a=q$: cum ergo sit $BP\times QM=Ba\times ad$, erit $-xy+ax=2a^2$, vnde $xy-ax+2a^2=0$, quae est aequatio localis assumta ad hyperbolam. Deinde vertice A, parametro a circa axem AN describatur parabola occurrens hyperbolae in vnico puncto M, eritque PM radix vnica realis aequationis propositae, reliquae sunt imaginariae. Cum enim sit $PM^2=x^2=ay$, erit $y=\frac{x^2}{a}$, quo valore substituto in aequatione $BP\times PM=Ba\times ad$, seu $xy-ax=-2a^2$, erit $\frac{x^3}{a}-ax=-2a^2$, et hinc $x^3-a^2x+2a^3=0$, quae est aequatio ad construendum proposita. Fig. 169.

381. *Probl. Construere aequationem* $y^3+aby-a^2c=0$.

Resol. Vt constructiones in tironum gratiam variemus, hanc absoluemus eruendo locales aequationes immediate ex ipsa proposita. Igitur transponendo fiet $y^3+aby=a^2c$, et hinc $a:y=y^2+ab:ac$. Fiat porro $a:y=y:x$, erit 1) $ax=y^2$, e qua in superiore proportione ax ponendo pro y^2 erit $a:y=ax+ab:ac$; atqui fuit $a:y=y:x$: ergo $y:x=ax+ab:ac=x+b:c$, vnde 2) $x^2+bx=cy$, cui si addatur aequatio prima, fiet 3) $ax+x^2+bx=y^2+cy$; et si secunda tollatur e prima, fiet 4) $ax-x^2-bx=y^2-cy$. Porro si e prima pro x substituatur in secunda valor $\frac{y^2}{a}$, erit $x^2+\frac{by^2}{a}=cy$, et omnia multiplicando per a, diuidendo per b fiet 5) $y^2+\frac{ax^2}{b}-\frac{acy}{b}=0$: ac denique si eadem fiat

ſubſtitutio in aequatione propoſita, ante per a diuiſa, erit 6) $xy+by-ac=0$, et ſic porro. Habebuntur ergo ſequentes aequationes locales

1) $y^2-ax=0$ *ad Parabolam.*

2) $x^2+bx-cy=0$ *ad Parabolam.*

3) $x^2-y^2+ax+bx-cy=0$ *ad Hyperb. aequil.*

4) $y^2+x^2-cy-ax+bx=0$ *ad Circulum.*

5) $y^2+\frac{ax^2}{b}-\frac{acy}{b}=0$ *ad Ellipſim.*

6) $xy+by-ac=0$ *ad Hyperb. intra aſympt.*

Fig. 170. Iam 1) conſtruamus ſeorſim primam, et quartam. Et pro prima quidem circa rectam indefinitam AF, parametro a, deſcribatur parabola AR, in qua ſumta quauis abſciſſa $AS=x$, erit ordinata $SK=y$.

In quarta eſt $y^2-cy=ax-x^2-bx$, ac in membro primo quadratum complendo $y^2-cy+\frac{1}{4}c^2=ax-x^2-bx+\frac{1}{4}c^2$. Fiat primi membri radix $y-\frac{1}{2}c=p$, erit $p^2=ax-x^2-bx+\frac{1}{4}c^2$, ſeu $x^2+bx-ax=\frac{1}{4}c^2-p^2$, ac rurſus in membro primo quadratum complendo $x^2+bx-ax+(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a)^2=\frac{1}{4}c^2+(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a)^2-p^2$. Fiat primi membri radix $x+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a=q$, erit $q^2=\frac{1}{4}c^2+(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a)^2-p^2$, ſeu $p^2=\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2-q^2$: eſt ergo radius circuli deſcribendi $\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2)}$, qui idem fuiſſet erutus etiam comparatione praeſentis aequationis cum formula generali circuli (275).

Fig. 171. Quare ſuper recta quacunque indefinita FN capiatur $AN=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, et erigatur perpendiculum $NC=\frac{1}{2}c$, erit hypotenuſa $CA=\sqrt{(NC^2+AN^2)}=\sqrt{(\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2)}$, qua proinde tanquam radio deſcribatur circulus, et ducatur alter radius CQ ad NA parallelus, erigaturque ad NA perpendiculum AB, erit arcus AQB locus radicum poſitiuarum aequationis

localis assumtae quartae. Sit enim quaeuis abscissa $AP=x$, ordinata $PM=y$, erit $TM=PM-PT$, vel $=PT-PM=y-\frac{1}{2}c$, vel $=\frac{1}{2}c-y$, et $CT=NA+AP=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+x$; atqui $TM^2=CQ^2-CT^2$: ergo $y^2-cy+\frac{1}{4}c^2=\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{4}a^2-bx+ax-x^2$, id est $y^2+x^2-cy-ax+bx=0$, quae est aequatio localis quarta.

Combinentur iam loca seorsim constructa, ita vt tam origines A et A, quam axes abscissarum AF et AF congruant; secabit circulus parabolam in punctis A et K, eritque $KS=y$ radix vnica realis aequationis propositae, reliquae duae imaginariae sunt. Perspicuum autem est constructionem legitime esse perfectam: sit enim $AS=x$, $SK=y$, erit vi parabolae $y^2=ax$, adeoque $AS=DE=x=\frac{y^2}{a}$: item $NC=SE=\frac{1}{2}c$, $AN=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, $CE=NA+AS=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+\frac{y^2}{a}$, $EK=y-\frac{1}{2}c$; atqui CK^2 seu $CA^2=CE^2+EK^2$: ergo $\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2=\frac{y^4}{a^2}+\frac{by^2}{a}+\frac{1}{4}b^2-y^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2+y^2-cy+\frac{1}{4}c^2$, seu $\frac{y^4}{a^2}+\frac{by^2}{a}-cy=0$, vnde $y^3+aby-a^2c=0$, quae est aequatio ad construendum proposita, cumque assurrexerit ad gradum quartum, seu multiplicata sit per $y=0$, idcirco secabit circulus parabolam etiam in origine abscissarum A, vbi radix $y=0$. Fig. 170.

2) Construamus eandem aequationem ope localium quartae, et quintae. Constructio quartae manebit eadem; quintam conferamus cum formula generali ellipseos (278), vt in vtraque methodo construendi loca tiro exerceatur. Facta ergo comparatione erit 1) $-\frac{2n}{m}=0$, seu $n=0$, et hinc $m=e$; ac faciendo $e=a$, erit $m=a$. 2) $\frac{e^2p}{2hm^2}=\frac{a}{b}$, seu $\frac{p}{2h}=\frac{a}{b}$, et $p=\frac{2ah}{b}$. 3) $2r=\frac{ac}{b}$, et $r=\frac{ac}{2b}$. 4) $t=0$. 5) $r^2=\frac{h^2p}{2h}$, ac pro r, et $\frac{p}{2h}$ in-

uentos valores ſubſtituendo erit $\frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{ah^2}{b}$, vnde $h^2 = \frac{ac^2}{4b}$, et $h = \sqrt{\frac{ac^2}{4b}}$, quo valore in expreſſione $p = \frac{2ah}{b}$ ſubſtituto fiet $p = \frac{2a}{b}\sqrt{\frac{ac^2}{4b}}$.

Adparet adeo in Fig. 68 ob $n = o$ rectam BE euaneſcere, adeoque rectas HB et HE congruere; item ob $t = o$ euaneſcere rectam HG, ac punctum originis abſciſſarum H cadere in G. Ducta ergo recta indefinita NF, ſumtaque origine abſciſſa-

Fig. 172. rum alicubi in A, fiat perpendiculum $AD = r = \frac{ac}{2b}$, ac per D ducatur recta ad NF parallela, in qua fiat $DG = DH = \sqrt{\frac{ac^2}{4b}}$, tum axe tranſuerſo GH, parametro $\frac{2a}{b}\sqrt{\frac{ac^2}{4b}}$ deſcribatur ellipſis, erit haec locus aequatiónis quintae. Sit enim abſciſſa quaeuis $AP = x$, ordinata $PM = y$, erit $IM = PM - PI = y - \frac{ac}{2b}$, vel $= PI - PM = \frac{ac}{2b} - y$; atqui in ellipſi $IM^2 : DH^2 - DI^2 = p : 2h$ (Elem. 630, 631): ergo $y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} = \left(\frac{ac^2}{4b} - x^2\right) \times \frac{a}{b}$, ſeu $y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b}$, vnde $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = o$, quae eſt aequatio quinta localis ad conſtruendum aſſumta. Tranſire autem ellipſim per originem A facile patet: nam cum ſemiaxis tranſuerſus eiuſdem ſit $\sqrt{\frac{ac^2}{4b}}$, et ſemiparameter $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{ac^2}{4b}}$, ſemiaxis coniugatus inter haec medius proportionalis erit $= \sqrt{\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2c^2}{16b^2}}\right)} = \sqrt{\frac{a^2c^2}{4b^2}} = \frac{ac}{2b} = DA$: ergo DA eſt ſemiaxis coniugatus, et hinc punctum A in elllpſi.

Conbinemus iam loca conſtructa imponendo circulum ellipſi ita, vt origines A et A, axeſque abſciſſarum AF et AF congruant: ſecabit circulus ellipſin praeter originem A in vnico

pun-

puncto M, eritque PM vnica radix realis aequationis propositae. Erit quippe $TM = PM - PT = y - \frac{1}{2}c$, et $CT = AP + NA = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$; atqui $CM^2 = TM^2 + CT^2$: ergo $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 + x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2$, seu $y^2 - cy + x^2 + bx - ax = 0$; eruitur vero ex aequatione ad ellipsim $x^2 = cy - \frac{by^2}{a}$: quare hoc valore substituto erit $y^2 - cy + cy - \frac{by^2}{a} + bx - ax = 0$, seu $\frac{ay^2 - by^2}{a} = ax - bx$, ac per $a - b$ diuidendo $\frac{y^2}{a} = x$, et $\frac{y^4}{a^2} = x^2 = cy - \frac{by^2}{a}$, vnde $\frac{y^4}{a^2} - cy + \frac{by^2}{a} = 0$, seu $y^3 + aby - a^2c = 0$, quae est aequatio ad construendum proposita.

382. *Probl. Construere aequationem* $y^4 + aby^2 + a^2cy - a^3d = 0$.

Resol. Cum in proposita aequatione desit terminus secundus, in formulis localibus omittantur omnes termini, in quibus occurrit n, ac terminus vltimus fiat negatiuus, assumendo a pro vnitate: obuenient sequentes aequationes locales

1) $y^2 - ax = 0$ *ad Parabolam.*

2) $x^2 + bx + cy - ad = 0$ *ad Parabolam.*

3) $x^2 + y^2 + bx - ax + cy - ad = 0$ *ad Circulum.*

4) $x^2 - y^2 + bx + ax + cy - ad = 0$ *ad Hyperb. aequil.*

Construamus iam seorsim primam, ac tertiam. Pro prima circa rectam indefinitam AG, parametro a describatur parabola, erit in ea $AP = x$, $PM = y$, et $y^2 = ax$. In tertia habemus $x^2 + bx - ax = -y^2 - cy + ad$, et in membro primo quadratum complendo $x^2 + bx - ax + (\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)^2 = -y^2 - cy + (\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)^2 + ad$. Fiat primi membri radix $x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a = p$, erit transponendo $y^2 + cy = (\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)^2 + ad - p^2$, et rursus complendo quadratum in membro primo $y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 + (\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)^2 + ad - p^2$. Denique fiat membri primi radix $y + \frac{1}{2}c = q$, Fig. 173.

erit $q^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + ad - p^2$: est ergo radius circuli describendi $= \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + ad)}$, qui idem eruitur etiam comparatione praesentis aequationis cum formula generali circuli (275).

Igitur ad axem parabolae AG erigatur perpendiculum AD $= \frac{1}{2}c$, et per D ducatur recta indefinita BS ad AG parallela, in qua capiatur $DC = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, erit hypotenusa $AC = \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2)}$. Ex AC resecetur $AT = a$, et producatur CA in L, ita vt sit $AL = d$, ac diametro TL describatur semicirculus TQL, erit perpendiculum $AQ = \sqrt{ad}$, adeoque $QC = \sqrt{(AC^2 + AQ^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + ad)}$, quo tanquam radio describatur circulus occurrens parabolae in punctis M et *m*: erit ordinata $PM = y$ radix positiua, et ordinata $pm = -y$ radix negatiua aequationis propositae.

Erit quippe $RM = PM + PR = y + \frac{1}{2}c$, ac $rm = pm - pr = -y - \frac{1}{2}c$; item $CR = CD - AP = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - x$, et si pro x ponatur $\frac{y^2}{a}$ ex aequatione ad parabolam, erit $CR = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{y^2}{a}$; atqui $CM^2 = RM^2 + RC^2$: ergo $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + \frac{by^2}{a} - y^2 + \frac{y^4}{a^2}$, seu $\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} + cy - ad = 0$, vnde $y^4 + aby^2 + a^2cy - a^3d = 0$, quae est aequatio ad constructionem propositam.

383. *Probl. Construere aequationem* $y^4 - 5a^2y^2 + 2a^3y + 3a^4 = 0$.

Resol. Substitutis de more valoribus in formulis localibus, erit locus primus ad parabolam $y^2 - ax = 0$, e qua si valores y^4 et y^3 substituantur in data aequatione, erit $x^2 - 5ax + 2ay + 3a^2 = 0$, cui addendo locum priorem ad parabolam fiet $x^2 - 6ax + 2ay + 3a^2c + y^2 = 0$, locus ad circulum, cuius radius ope for-

mulae generalis circuli, vel complendo pro more quadrata eruitur $=\sqrt{7a^2}$.

Deſcribatur ergo hoc radio circulus, fiatque $CB=3a$, et perpendiculum $BA=a$, et per A ducatur recta indefinita AF ad BC parallela, circa quam parametro a deſcribatur parabola ſecans circulum in punctis M, M, m, m, erunt ordinatae PM et $PM=y$ radices poſitiuae, pm et $pm=-y$ radices negatiuae aequationis propoſitae. Fig. 174.

Si enim ſit $AP=x$, $PM=y$, erit $EC=CB-AP=3a-x$, vel $CG=AP-CB=x-3a$, EM vel $GM=BA+PM=a+y$; atqui $CM^2=EC^2+EM^2=CG^2+GM^2$: ergo $7a^2=9a^2-6ax+x^2+y^2+2ay+a^2$, vnde $x^2-6ax+2ay+y^2+3a^2=0$; ac ex aequatione ad parabolam pro x^2 ponendo $\frac{y^4}{a^2}$, pro ax vero y^2, erit $\frac{y^4}{a^2}-5y^2+2ay+3a^2=0$, ſeu $y^4-5a^2y^2+2a^3y+3a^4=0$, quae eſt aequatio ad conſtruendum propoſita. Eodem modo oſtenditur radices eiuſdem negatiuas eſſe pm et pm.

CAPVT IV.

De Adplicationibus Conſtructionum praecedentium ad varia Problemata Geometrica.

384. *Probl. Inter datas rectas* a *et* b *duas mediias proportionales inuenire.*

Reſol. Sit prior e mediis illis proportionalibus $=y$, erit ex ſuperius dictis $y^3-a^2b=0$, (368) quam quidem aequationem in ſecundo capite ope binarum parabolarum iam conſtruximus; nunc vero parabolam cum hyperbola intra aſymptotos combinabimus. Aequatio localis prima ad parabolam fuit $y^2=ax$,

quo valore in aequatione propoſita pro y^2 ſubſtituto erit $axy - a^2b = o$, ſeu $xy - ab = o$, quae aequatio eſt ad hyperbolam intra aſymptotos.

Fig. 175. Iungantur ergo ad angulos rectos lineae indefinitae QR et OT, fiatque $AB = a$, $AD = BC = b$: deinde inter aſymptotos QR et OT per punctum C deſcribatur hyperbola; ac vertice A, parametro a, circa axem AR deſcribatur parabola ſecans hyperbolam in puncto M, erit ordinata $PM = y$, abſciſſa $AP = x$. Eſt enim vi hyperbolae $AP \times PM = AB \times BC$, ſeu $xy = ab$, et vi parabolae $AP \times a = PM^2$, ſeu $ax = y^2$, vnde $x = \frac{y^2}{a}$, quo valore in priori aequatione ſubſtituto erit $\frac{y^3}{a} = ab$: vnde $y^3 - a^2b = o$, quae eſt aequatio ad conſtruendum propoſita. Sunt adeo mediae proportionales quaeſitae PM et AP.

385. *Probl. Datum cubum duplicare, ſeu cubum eiuſdem duplum conſtruere.*

Reſol. Sit cubi dati latus $= a$, quaeſiti $= y$, erit ex problematis conditione $y^3 = 2a^3$; ſeu ſi ponatur $2a = b$, erit $y^3 - a^2b = o$, quae cum ſit ipſiſſima aequatio prioris problematis, patet inter a et $2a$, ſeu inter a et b quaerendas eſſe duas medias proportionales, foreque earum primam y latus quaeſiti cubi. Aequationem hanc bis iam conſtruximus: conſtruemus tertium ope circuli et parabolae. Igitur aequatione ducta in $y = o$, erit $y^4 - a^2by = o$, adeoque in formulis localibus valores rite ſubſtituendo erit locus ad parabolam primus $y^2 - ax = o$, locus ad circulum $x^2 + y^2 - ax - by = o$.

Fig. 176. Locus prior conſtruetur, ſi circa axem AG parametro a deſcribatur parabola. Pro circulo adhibita toties methodo complendorum quadratorum, vel adhibita comparatione cum formula circuli generali, radius eruitur $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$. Igitur

in axe parabolae AG fiat $AD=\frac{1}{2}a$, et erigatur perpendiculum $DC=\frac{1}{2}b$, erit hypotenusa $AC=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2)}$, qua tanquam radio descriptus circulus occurret parabolae praeter originem A etiam in puncto M, eritque ordinata $PM=y$ latus cubi quaesiti, seu radix realis aequationis construendae. Si enim sit $AP=x$, $PM=y$, erit $CF=DP=AP-AD=x-\frac{1}{2}a$, et $FM=PM-DC=y-\frac{1}{2}b$; atqui ex natura circuli $FM^2=CR^2-CF^2$; ergo $y^2-by+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2-x^2+ax-\frac{1}{4}a^2$, seu $y^2-by+x^2-ax=0$, ac pro x et x^2 ponendo $\frac{y^2}{a}$ et $\frac{y^4}{a^2}$ ex aequatione ad parabolam, erit $y^2-by+\frac{y^4}{a^2}-y^2=0$, seu $\frac{y^4}{a^2}-by=0$, et hinc $y^3-a^2b=0$, quae erat aequatio construenda.

386. *Prob. Dato parallelepipedo cubum aequalem construere.*

Resol. Sint parallelepipedi dati latera a, b, c, latus cubi quaesiti $=y$, erit ex hypothesi $y^3=abc$, et $y^3-abc=0$, ac multiplicando per $=0$ erit $y^4-abcy=0$. Si iam in formulis localibus valores rite substituantur, erit locus primus $y^2-ax=0$, ad parabolam, tertius $x^2+y^2-ax-\frac{bcy}{a}=0$ ad circulum. Porro cum sit $y^3=abc$, erit $a:y=y^2:bc$, seu pro y^2 ponendo ax ex aequatione ad parabolam, erit $a:y=ax:bc$, vnde $axy=abc$, seu $xy-bc=0$, quae aequatio est ad hyperbolam intra asymptotos. Combinemus circulum 1) cum parabola, 2) cum hyperbola.

Igitur 1) circa axem indefinitum AG parametro a describatur parabola, quae erit locus aequationis $y^2-ax=0$. Pro loco ad circulum habemus $x^2-ax=-y^2+\frac{bcy}{a}$, et complendo quadratum in membro primo $x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2-y^2+\frac{bcy}{a}$. Fiat primi membri radix $x-\frac{1}{2}a=p$, erit transponendo $y-\frac{bcy}{a}=$ Fig. 177.

$\frac{1}{4}a^2 - p^2$, ac rurſus in membro primo quadratum complendo $y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2} = \frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}a^2 - p^2$. Fiat iterum primi membri radix $y - \frac{bc}{2a} = q$, erit $q^2 = \frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}a^2 - p^2$; vnde patet radium circuli deſcribendi eſſe $= \sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}a^2\right)}$, qui idem obueniret etiam ope formulae generalis circuli (275).

Iam cum in parabola origo abſciſſarum ſit in A, ſiat AD $= \frac{1}{2}a$, et perpendiculum DC $= \frac{bc}{2a}$, erit hypotenuſa AC $= \sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}a^2\right)}$, qua tanquam radio deſcriptus circulus ſecabit parabolam praeter punctum originis A etiam in punctis M, m, m, eritque PM $= y$, radix poſitiua, pm et $pm = -y$ radices negatiuae aequationis conſtruendae. Si enim ſit AP $= x$, $= \frac{y^2}{a}$ vi aequationis ad parabolam, et PM $= y$ vel $pm = -y$, erit QM $=$ PM $-$ DC $= y - \frac{bc}{2a}$, vel $qm = pm +$ DC $= -y + \frac{bc}{2a}$, DP $=$ CQ $=$ AP $-$ AD $= x - \frac{1}{2}a = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a$; vel $Dp = Cq =$ AD $-$ $Ap = \frac{1}{2}a - \frac{y^2}{a}$ vel $=$ Ap $-$ AD $= \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a$; atqui ex natura circuli $QM^2 = CR^2 - CQ^2$, vel $qm^2 = CR^2 - Cq^2$: ergo $y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2} = \frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{y^4}{a^2} + y^2 - \frac{1}{4}a^2$, ſeu $\frac{y^4}{a^2} - \frac{bcy}{a} = 0$, et hinc $y^3 - abc = 0$, quae fuit aequatio conſtruenda.

2) Combinemus eundem circulum cum hyperbola intra
Fig. 178. aſymptotos. Ducatur recta RN $= b$, ac eidem perpendicularis RA $= c$, et ex A recta indefinita AT ad RN parallela; tum intra aſymptotos AS et AT deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum N, erit ea locus aequationis $xy = bc$. Si enim ſit AP $= x$, PM $= y$, erit AP $\times$ PM $=$ AR $\times$ RN, ſeu $xy = bc$.

Fiat porro $AB=\frac{bc}{2a}$, ac perpendiculum $BC=\frac{1}{2}a$, erit hypotenusa $AC=\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{4a^2}+\frac{1}{4}a^2\right)}$, qua tanquam radio descriptus circulus secabit hyperbolam alicubi in M, eritque $PM=y$ radix positiua aequationis consequendae.

Nam si fuerit $AP=x$, $PM=y$, erit $CK=AP-AD=x-\frac{1}{2}a$, $KM=PM-AB=y-\frac{bc}{2a}$; atqui $CM^2=CK^2+KM^2$: ergo $\frac{b^2c^2}{4a^2}+\frac{1}{4}a^2=x^2-ax+\frac{1}{4}a^2+y^2-\frac{bcy}{a}+\frac{b^2c^2}{4a^2}$, seu $y^2-\frac{bcy}{a}+x^2-ax=0$: ac pro bc substituendo xy erit $y^2-\frac{xy^2}{a}+x^2-ax=0$, vnde $ay^2-xy^2=a^2x-ax^2$, et omnia diuidendo per $a-x$ erit $y^2=ax$, et $y^4=a^2x^2$, vnde $x^2=\frac{y^4}{a^2}$: si ergo in aequatione superiore $y^2-\frac{bcy}{a}+x^2-ax=0$ valores hi pro y^2 et x^2 substituantur, fiet $ax-\frac{bcy}{a}+\frac{y^4}{a^2}-ax=0$, seu $\frac{y^4}{a^2}-\frac{bcy}{a}=0$, seu $y^3-abc=0$, quae fuit aequatio construenda.

387. *Probl. Dato rectangulo* ABCD *in latere* BC *producto inuenire punctum* E, *ad quod si ex angulo* A *ducatur recta* AE, *pars intercepta* GE *aequetur rectae datae.* Fig. 179.

Resol. Sit recta illa data $=c$, latus rectanguli $AB=a$, $AD=b$, $DG=x$, erit $CG=a-x$, et ex hypothesi $GE=c$. Porro cõ triangula CGE et AGD similia erit $CG:GE=DG:AG$, seu $a-x:c=x:AG=\frac{cx}{a-x}$; atqui $AG=\sqrt{(AD^2+DG^2)}=\sqrt{(b^2+x^2)}$: ergo $\frac{cx}{a-x}=\sqrt{(b^2+x^2)}$, seu $\frac{c^2x^2}{a^2-2ax+x^2}=b^2+x^2$, ac ad eundem denominatorem reducendo $c^2x^2=a^2b^2-2ab^2x+b^2x^2+a^2x^2-2ax^3+x^4$, seu $x^4-2ax^3+a^2x^2+b^2x^2-c^2x^2-2ab^2x+a^2b^2=0$. Assumatur iam pro arbitrio aequatio aliqua localis $xy=ab$, quae est ad hyperbolam intra asymptotos, et in supe-

riore pro ab ponatur xy, fiet $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + b^2x^2 - c^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = 0$, seu per x^2 omnia diuidendo $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - c^2 - 2by + y^2 = 0$, quae aequatio est ad circulum.

Igitur inter latera AB et AD indefinite producta tanquam asymptotos describatur hyperbola per angulum C transiens; assumta quauis abscissa $AP = y$, erit ordinata $PM = x$, et $AP \times PM = AD \times DC$, seu $xy = ab$. Aequatio ad circulum transformetur methodo toties vsurpata bis complendo quadratum, vel conferatur cum aequatione generali circuli (275) reperietur radius circuli cum hyperbola combinandi $= c$, quo ex centro C descriptus circulus erit locus aequationis secundae. Si enim fuerit $AP = y$, $PM = x$, erit $DP = CD = y - b$, et $EM = PE - PM = a - x$; atqui in circulo $EM^2 = CT^2 - CE^2$: ergo $a^2 - 2ax + x^2 = c^2 - y^2 + 2by - b^2$, seu $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - c^2 - 2by + y^2 = 0$, quae est aequatio localis secunda.

Iam circulus hic secabit hyperbolam in punctis M et m, eruntque PM et $pm = y$ radices positiuae aequationis construendae. Si enim assumtis AP vel Ap pro y, et PM vel pm pro x, in aequatione $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - c^2 - 2by + y^2 = 0$ pro y et y^2 substituantur ex aequatione ad hyperbolam valores $\frac{ab}{x}$, et $\frac{a^2b^2}{x^2}$, restituetur aequatio ad construendum proposita. Porro radix PM exhibet rectam $DG = x$, per cuius punctum G transit recta AE, cuius portio GE aequatur rectae datae: radix $pm = Dg$ seruit pro angulo BCg, si nempe recta AE occurrere debeat lateri DC producto.

388. *Coroll.* Si data recta c tanta non fuerit, vt circulus ea descriptus secet hyperbolam oppositam, reliquae radices erunt imaginariae; sin autem secet, radices erunt reales, et negatiuae, ser-

seruientque pro angulo BCD, si nempe recta AE occurrere debeat lateribus CB et CD in partem contrariam productis.

389. *Probl. Datum quemuis angulum* ACB, *vel arcum* AEB *in tres aequales partes diuidere.* Fig. 180.

Resol. Cogitetur angulus iam esse sic diuisus per rectas CD et CE, et circulus e vertice C descriptus, cuius radius CA sit $=a$, chorda $AB=b$, chordae vero $AD=DE=EB=y$. Ex puncto D concipiatur recta DF parallela ad CE. Imprimis triangula ACD, DCE, ECB erunt similia, aequalia, et aequicrura, vt est euidens. Deinde angulus ACD habebit pro mensura arcum AD, et angulus DAB dimidium arcum DEB, quod est $=$ AD, quare anguli hi aequales erunt. Ad haec angulus ADC communis erit triangulis ADG et ADC, quare haec triangula similia erunt, et hinc AD: AG = DC: AC; atqui $DC=AC$: ergo etiam $AG=AD$, ac eodem modo $BE=BH$. Denique etiam triangula ADG et DFG similia erunt, cum praeter angulum communem G sit angulus $FDG=DCE=ACD=DAG$: quare etiam triangulum DFG aequicrurum erit.

Porro ob triangula ACD et AGD similia erit AC: AD = AD: DG, seu $a:y=y:DG=\frac{y^2}{a}$: item ob triangula ADG et FDG similia erit AD: DG = DG: FG, seu $y:\frac{y^2}{a}=\frac{y^2}{a}:FG=\frac{y^3}{a^2}$; est autem $BH=BE=y$, et ob parallelas DF et EH aequales, etiam $FH=DE=y$, adeoque $BF=2y$; et quia $AF+FG=AD=y$, erit $BH+HF+FA+FG=3y$, seu $b+FG=b+\frac{y^3}{a^2}=3y$, et hinc $y^3-3a^2y+a^2b=0$, seu ducendo in $y=0$, erit $y^4-3a^2y^2+a^2by=0$. Si ergo in formulis localibus valores rite substituantur, erit locus primus $y^2-ax=0$ ad parabolam, tertius $x^2+y^2-4ax+by=0$ ad circulum. Quodsi in aequa-

tione inuenta $y^4 - 3a^2y^2 + a^3by = 0$ pro y^2 ponatur valor ax ex aequatione ad parabolam, fiet $axy^2 - 3a^2y^2 + a^3by = 0$, seu $xy - 3ay + ab = 0$, quae aequatio est ad hyperbolam intra asymptotos.

Fig. 181. Itaque 1) combinemus circulum cum parabola. Circa axem indefinitum AG, parametro a describatur parabola, erit $AP = x$, et $PM = y$, ac $y^2 = ax$. Deinde methodis toties iam adhibitis eliciatur ex aequatione locali ad circulum radius eiusdem $\sqrt{(4a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$; tum fiat perpendiculum $AD = \frac{1}{2}b$, ducaturque recta $DC = 2a$ parallela ad AG, erit hypotenusa $AC = \sqrt{(4a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$, qua tanquam radio descriptus circulus occurret parabolae praeter originem A praeterea in punctis M, N, m, eruntque ordinatae PM et $RN = y$ radices positiuae, et $pm = -y$ radix negatiua aequationis construendae, radix autem quarta est $= 0$, per quam scilicet aequatio multiplicata fuit. Porro radix PM est chorda tertiae partis arcus propositi AEB; radix QN est chorda tertiae partis arcus reliqui AKB; radix negatiua pm est chorda tertiae partis totius peripheriae, vt infra videbimus.

Rite constructam esse aequationem patet: nam posita abscissa $AP = x$, ordinata $PM = y$, erit $TM = AF - AP = 2a - x$, et $CT = AD + PM = \frac{1}{2}b + y$; atqui in circulo $TM^2 = CH^2 - CT$: ergo $4a^2 - 4ax + x^2 = 4a^2 + \frac{1}{4}b^2 - y^2 - by - \frac{1}{4}b^2$, seu $x^2 - 4ax + y^2 + by = 0$, ac pro x et x^2 substituendo valores ex aequatione ad parabolam erit $\frac{y^4}{a^2} - 4y^2 + y^2 + by$, seu $y^3 - 3a^2y + a^2b = 0$, quae erat aequatio construenda. Eadem erit ostendendi ratio relate ad reliquas duas radices QN et pm.

Fig. 182. 2) Combinemus eundem circulum cum hyperbola intra asymptotos. Fiat $AD = 2a$, perpendiculum $DC = \frac{1}{2}b$, et radio CA describatur circulus. In recta CD producta fiat $DN = b$, et in AD producta $DR = a$, seu $AR = 3a$: deinde intra asym-

ptotos RA et RT describatur hyperbola per punctum N transiens, secabit haec circulum in punctis M et m, eruntque PM et $pm=y$ radices positiuae aequationis construendae, vt supra PM et QN; radicem negatiuam exhiberet opposita hyperbola.

Legitimam esse constructionem facile ostenditur. Posita enim abscissa $AP=x$, ordinata $PM=y$, erit $PR=AR-AP=3a-x$, atqui in hyperbola $DR\times DN=RP\times PM$: ergo $ab=3ay-xy$, seu $xy-3ay+ab=0$, quae fuit assumta aequatio localis ad hyperbolam. Erit item $FC=AD-AP=2a-x$, et $FM=y+\frac{1}{2}b$; atqui $MC^2=FM^2+FC^2$: ergo $4a^2+\frac{1}{4}b^2=y^2+by+\frac{1}{4}b^2+4a^2-4ax+x^2$, seu $x^2-4ax+y^2+by=0$, quae fuit aequatio localis ad circulum: Porro aequatio prior ad hyperbolam in hanc resoluitur proportionem $3a-x:a=b:y$, et componendo $4a-x:a=b+y:y$, seu $4a-x:b+y=a:y$; aequatio vero ad circulum resoluitur in hanc $4a-x:b+y=y:x$; vnde $a:y=y:x$, et $y^2=ax$, $x=\frac{y^2}{a}$, $x^2=\frac{y^4}{a^2}$, quos valores substituendo in aequatione superiori $x^2-4ax+y^2+by=0$ obtinebitur $\frac{y^4}{a^2}-4y^2+y^2+by=0$, seu $y^3-3a^2y+a^2b=0$, quae erat aequatio construenda.

3) Combinemus parabolam cum hyperbola. Iunctis sub angulo recto lineis indefinitis AK et GL, fiat $CD=a$, perpendiculum $DN=b$, $DA=2a$; deinde intra asymptotos AK et GL describantur hyperbolae oppositae, quarum vna per N transeat, ac per punctum A ducatur recta indefinita AS parallela ad GL, erit haec hyperbola locus aequationis assumtae $xy-3ay+ab=0$. Sumta enim abscissa $AP=y$, ordinata $PM=x$, erit $HM=AC-PM=3a-x$; atqui ex natura hyperbolae $CH\times HM=CF\times FN$: ergo $3ay-xy=ab$, seu $xy-3ay+ab=0$. Fig. 183.

Porro vertice A, parametro a, circa axem AK describatur parabola secans hyperbolam in punctis T, M, m, erunt TR et MQ $= y$ radices positiuae, $qm = -y$ radix negatiua aequationis construendae. Si enim in aequatione superiore $xy - 3ay + ab = 0$, pro x substituatur valor $\frac{y^2}{a}$ ex aequatione ad parabolam, perspicuum est restitui aequationem construendam.

390. *Coroll.* 1. Hyperbolam citeriorem a parabola secari in duobus punctis T et M euidens est. Cum enim sit AD $= 2a$, ponendo hunc valorem loco x in aequatione ad parabolam $y^2 = ax$, erit $y^2 = DV^2 = 2a^2$; atqui cum arcus trifariam secandus semiperipheria minor, vel maior sit, semper est $2a^2 > b^2$, seu $DV^2 > DN^2$, et $DV > DN$: quare portio aliqua hyperbolae TNM intra parabolam cadit, quae proinde secatur a parabola in punctis T et M.

391. *Coroll.* 2. Si angulus propositus rectus fuerit, diuisionem eiusdem in tres aequales partes iam alibi vidimus (238): facillima autem est sequens. Hypotenusa, ceu diametro describatur circulus, qui necessario transibit per verticem anguli recti, insistentis semicirculo, cuius tertiam partem subtendet ipse radius, quemadmodum notum est ex elementis.

Fig. 184. *Scholion.* Elegantissimam suppeditat constructionem combinatio hyperbolae cum ipso illo circulo, cuius arcus diuidendus est, quem proponit Boscouichius noster hunc in modum. Sit circuli dati arcus trifariam secandus ABC, secetur chorda eiusdem AC bifariam et perpendiculariter per rectam BG necessario transeuntem per centrum O: tum foco C, directrice BG, ac ratione determinante 2 : 1 describatur hyperbola secans arcum propositum in puncto D, erit CD tertia pars arcus propositi, ita vt ducta recta DE ad directricem perpendiculari, arcus trifariam

secetur in punctis E et D. Est enim ex constructione CD: DH = 2: 1: ergo CD = 2DH = DE; et quia ob chordas ED et AC parallelas arcus CD = EA, omnes tres arcus CD, DE, et EA aequales erunt. Porro idem hyperbolae ramus secat circulum etiam in puncto R, erit, etiam vi constructionis CR: RI = 2: 1, et hinc CR = 2RI = RT, et ob chordas AC et RT parallelas, arcus CR = AT, adeoque omnes tres arcus CR, RT et TA aequales erunt.

Porro vt videat tiro vsum radicis negatiuae in superioribus constructionibus, et in hac ipsa Boscouichiana occurrentis, si ramus quoque hyperbolae oppositus describatur, sit arcus ABD trifariam secandus, chorda eiusdem AD = 2b, radius CA = r, perpendiculum CE = a. Ducatur diameter MN chordae *ad* parallela, et concipiatur arcus iam trifariam diuisus in punctis G et H, ob arcus AG et DH aequales, chorda GH parallela erit ad AD: ac radius CB vtrique perpendicularis ambas bifariam diuidet. Demittatur iam perpendiculum GP, sitque PC = GK = y, erit $GP = \sqrt{(r^2 - y^2)}$, et ob triangula GPC et CFE similia $GP : CP = CE : EF$, seu $\sqrt{(r^2 - y^2)} : y = a : EF = \frac{ay}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$. Item in triangulis aequicruris ACG et GCH ob angulos ad C aequales erit angulus AGC = CGH = CFE = GFA; vnde in triangulo AGF latus AG = AF = GH = 2y, et hinc $AE = b = 2y + \frac{ay}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$, seu $2y - b = -\frac{ay}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$, ac eleuando ad quadratum $4y^2 - 4by + b^2 = \frac{a^2y^2}{r^2 - y^2}$, seu $4r^2y^2 - 4y^4 - 4r^2by + 4by^3 + b^2r^2 - b^2y^2 = a^2y^2$, et hinc $y^4 - by^3 + \frac{b^2y^2 + a^2y^2}{4} - r^2y^2 + r^2by - \frac{b^2r^2}{4} = 0$, ac pro $b^2 + a^2$ ponendo r^2 fiet $y^4 - by^3 - \frac{3r^2y^2}{4} + r^2by - \frac{b^2r^2}{4} = 0$, ac denique diuidendo per $y - b$ fiet $y^3 - \frac{3r^2y}{4}$

Fig. 185.

$+\frac{br^2}{4}=0$. Si iam fiat $GP=\sqrt{(r^2-y^2)}=x$, erit $FE=\frac{ay}{x}$, $AE=2y+\frac{ay}{x}=b$, seu $2xy+ay=bx$, quae aequatio est ad hyperbolam intra asymptotos.

Vt iam hyperbolam istam combinemus cum eodem illo circulo, cuius arcus trifariam diuidendus est, diuidatur recta AE bifariam in Q ac per Q ducatur linea indefinita QX ad BZ parallela, in qua fiat $OI=\frac{1}{2}a$, ac per I ducatur recta indefinita WE parallella ad MN; deinde inter asymptotos QX et WE per centrum circuli describatur hyperbola, erit $I\bigtriangledown\times\bigtriangledown C=I\gamma\times\gamma G$, seu $\frac{1}{4}ab=(\frac{1}{2}b-y)\times(\frac{1}{2}a+x)=\frac{1}{4}ab-\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bx-xy$, vnde $2xy+ay=bx$, qui fuit locus propositus ad hyperbolam, vbi si pro x reponatur valor $\sqrt{(r^2-y^2)}$, restituetur aequatio construenda $y^3-\frac{3r^2}{4}+\frac{br^2}{4}=0$. Secabit autem haec hyperbola circulum in punctis G, L, Y, T, eruntque GK, $L\vartheta$, $YR=y$ radices positiuae, et $ST=-y$ radix negatiua aequationis construendae. Et quidem radix GK, cuius duplum GH est chorda tertiae partis arcus propositi, seruit pro diuidendo arcu proposito ABD: radix YR pro arcu residuo AZD; si enim hic arcus proponeretur trifariam secandus, eadem plane prodiret aequatio, et eadem foret construenda hyperbola LY.

Radix tertia $L\vartheta$ non seruit ad problema, sed est $=b$, per quam scilicet supra diuisimus aequationem y^4-by^3 etc. Fiat enim $I\eta=OI=\frac{1}{2}a$, erit $O\eta=OQ$, et hinc ordinata circuli $L\vartheta=AE=b$; probandum iam est eandem esse etiam ordinatam hyperbolae LY, quod quidem facile patet: nam $\eta\vartheta=QE=\frac{1}{2}b$, vnde $\eta L=\frac{1}{2}b$; atqui rectangulum constans hyperbolae LY est $=\frac{1}{4}ab=OI\times\eta L$: ergo punctum L est in hyperbola LY, et recta $L\vartheta=b$ eiusdem ordinata.

Radix demum negatiua ST ſeruit pro trifariam ſecanda integra peripheria. Cum enim ſit AE=LQ, erit arcus AM=ML, et arcus ABD=LZV, et hinc arcus AL=DV erit ſemidifferentia arcuum ABD et AZD. Si iam trifariam ſecandus eſſet arcus VD, eadem prorſus hyperbola foret deſcribenda, et inueniretur eius tertia pars =VT; quare VT eſt tertia pars ſemidifferentiae arcuum ABD et AZD, et hinc DT eſt tertia pars ipſius differentiae; ſed GD=$\frac{1}{3}$ABD: ergo GD eſt tertia pars ſummae arcuum ABD+LZV, et hinc GD+DT=GT eſt tertia pars totius peripheriae.

Finis Libri Secundi.

Pag.			Errores	Corrigendi
11	lin.	9	mx^2	$mx^2:$
93	lin.	23	euaneſcens	enaſcens
113	lin.	8	$q-o$	$q=o$
121	lin.	8	$1-\sqrt{6}$	$-1-\sqrt{-6}$
122	lin.	4	$-1\pm\sqrt{-2}$	$1\pm\sqrt{-2}$
127	lin.	4	ex	et
135	lin.	vlt.	$\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{13}}{3}+\frac{15}{\sqrt{13}}$	$\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{\left(13+\frac{75}{\sqrt{13}}\right)}}{3}$
137	lin.	16	100000	1000000
157	lin.	9	detas	datas
186	lin.	11	eiuſdemque	eiuſdem per
211	lin.	2	ry	xy
222	lin.	22	$+DG$	$-DG$
246	lin.	vlt.	$\frac{bk}{e}-q$	$\frac{bk}{e}=q$
263	lin.	9	$\frac{ab+abc}{ma}$	$\frac{ab+abc}{m}$

In Fig. 102 producatur recta CB vſque in a
In Fig. 116, 117 ducatur recta SE.

INDEX CAPITVM

LIBER I.

De Arithmeticis Aequationum Resolutionibus.

PROLEGOMENON . . . . . Pag. 1

SECTIO I.

De Natura, et Proprietatibus aequationum compositarum.

CAPVT I.
De origine aequationum compositarum. 14
CAPVT II.
De nonnullis aequationum Transformationibus. 27
CAPVT III.
De aequationibus duas, aut plures radices aequales habentibus. 39
CAPVT IV.
De Limitibus, intra quos radices aequationum continentur. 47
CAPVT V.
De Incrementis, et Decrementis valorum aequationis e continua incognitae mutatione oriundis. . . . 58
CAPVT VI.
De Maximis, et Minimis aequationum valoribus. . . . 68

)(

INDEX CAPITVM.

SECTIO II.

De Resolutionibus arithmeticis aequationum compositarum.

CAPVT I.

De inueniendis aequationibus rationalibus, per quas aequatio data ad gradum inferiorem deprimi possit. . . 80

CAPVT II.

De Resolutionibus aequationum secundi gradus. . . . 94

CAPVT III.

De Resolutionibus aequationum tertii gradus. 100

CAPVT IV.

De Resolutionibus aequationum quarti gradus. 122

CAPVT V.

De variis ad radices adproximandi methodis. 133

LIBER II.

De Geometricis Aequationum Resolutionibus.

PROLEGOMENON. . . . 145

SECTIO I.

De Constructionibus aequationum determinatarum primi, et secundi gradus.

CAPVT I.

De Constructione aequationum determinatarum primi gradus. 154

CAPVT II.

De Constructione aequationum determinatarum secundi gradus. 163

CAPVT III.

De variis praecedentium Conſtructionum adplicationibus ad problemata Geometrica. 168

CAPVT IV.

De variis earundem Conſtructionum adplicationibus ad problemata Phyſica et Mechanica. 185

SECTIO II.

De Locis Geometricis.

CAPVT I.

De Natura, et Inueſtigatione Locorum Geometricorum. 196

CAPVT II.

De variis Problematis ad illuſtrandam locorum geometricorum naturam pertinentibus. 215

CAPVT III.

De Transformationibus Locorum Geometricorum. . . 229

CAPVT IV.

De Conſtructione Locorum Geometricorum primi gradus. 244

CAPVT V.

De Conſtructione Locorum Geometricorum ſecundi gradus. 251

CAPVT VI.

De ſuperiorum Conſtructionum Adplicationibus ad varia Problemata 284

INDEX CAPITVM.

SECTIO III.

De Combinatione Locorum Geometricorum, ac de conſtructione aequationum tertii, et quarti gradus.

CAPVT I.

De mutuis Interſectionibus duorum Locorum Geometricorum. 294

CAPVT II.

De combinatione duorum Locorum Geometricorum ad conſtructiones aequationum tertii, et quarti gradus. 301

CAPVT III.

De Conſtructione aequationum tertii, et quarti gradus. 308

CAPVT IV.

De Adplicationibus Conſtructionum praecedentium ad varia Problemata Geometrica. 323

Fig. 1

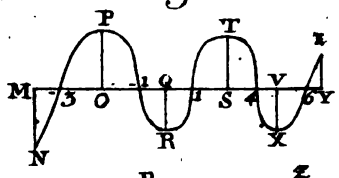


Fig. 2.

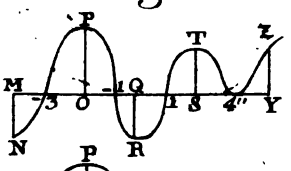
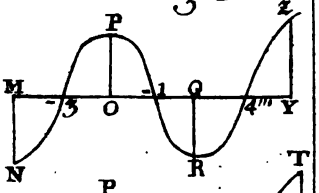


Fig. 3.



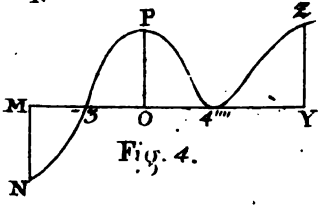


Fig. 4.

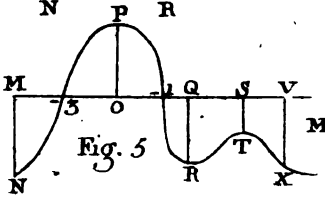


Fig. 5

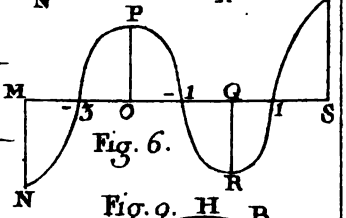


Fig. 6.

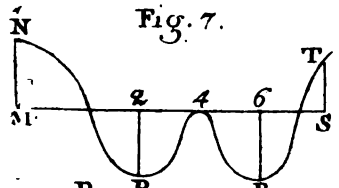


Fig. 7.

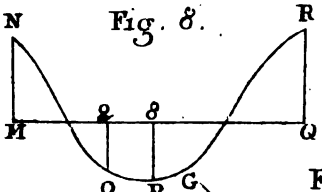


Fig. 8.

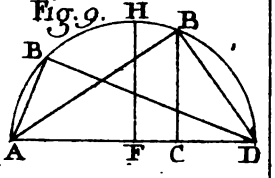


Fig. 9.

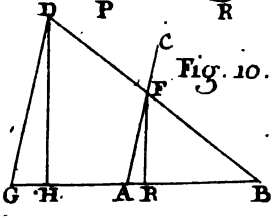


Fig. 10.

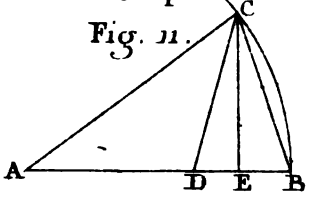


Fig. 11.

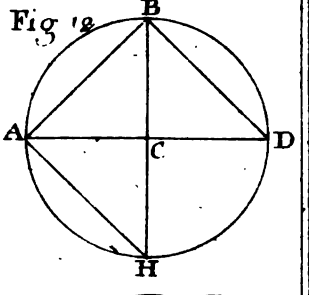


Fig. 12

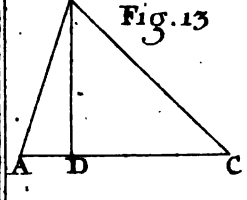


Fig. 13

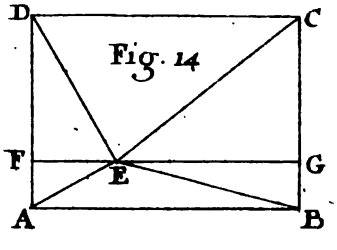


Fig. 14

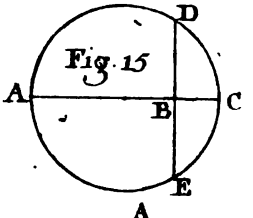


Fig. 15

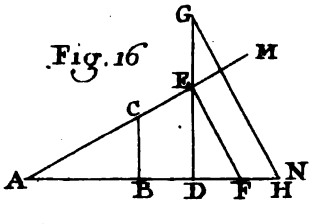


Fig. 16

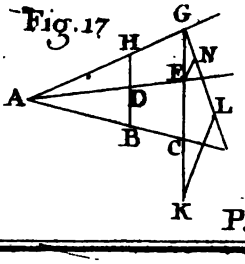


Fig. 17

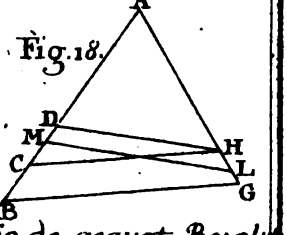


Fig. 18.

P. Mako de aequat. Resolut.

Fig. 19.

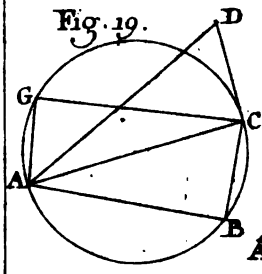


Fig. 20.

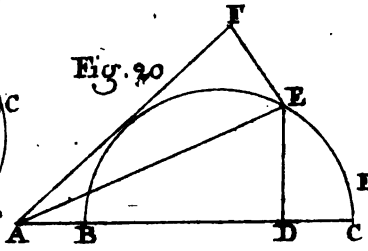


Fig. 21.

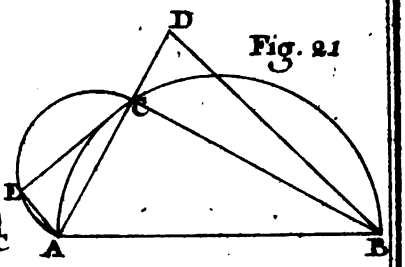


Fig. 22.

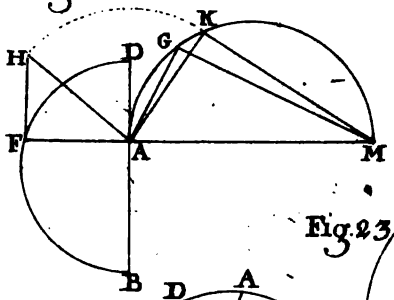


Fig. 24.

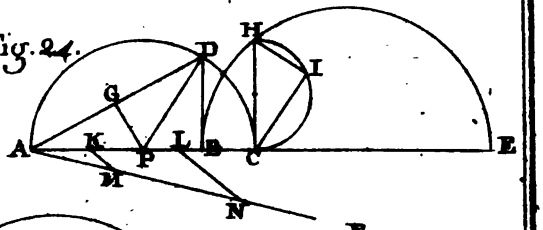


Fig. 23.

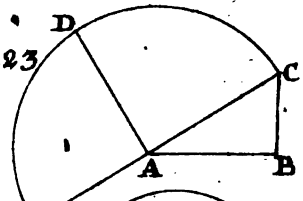


Fig. 26.

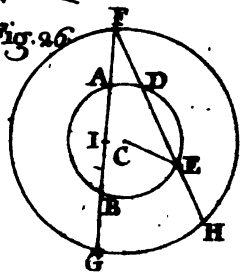


Fig. 25.

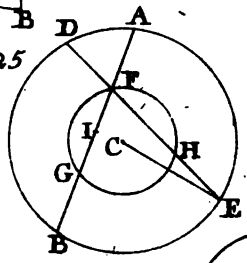


Fig. 27.

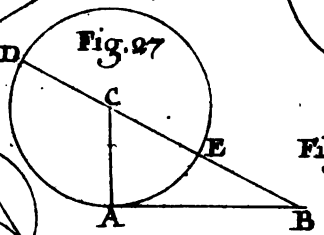


Fig. 30.

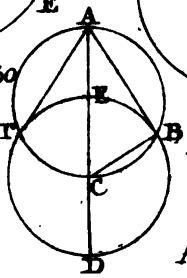


Fig. 28.

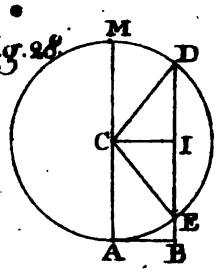


Fig. 29.

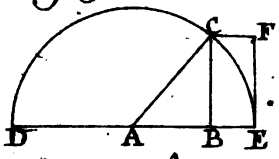


Fig. 31.

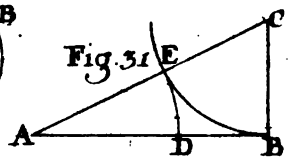


Fig. 32.

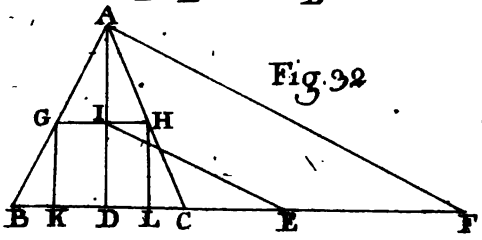
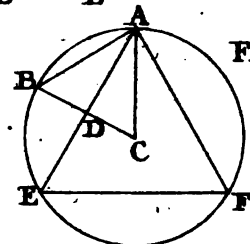
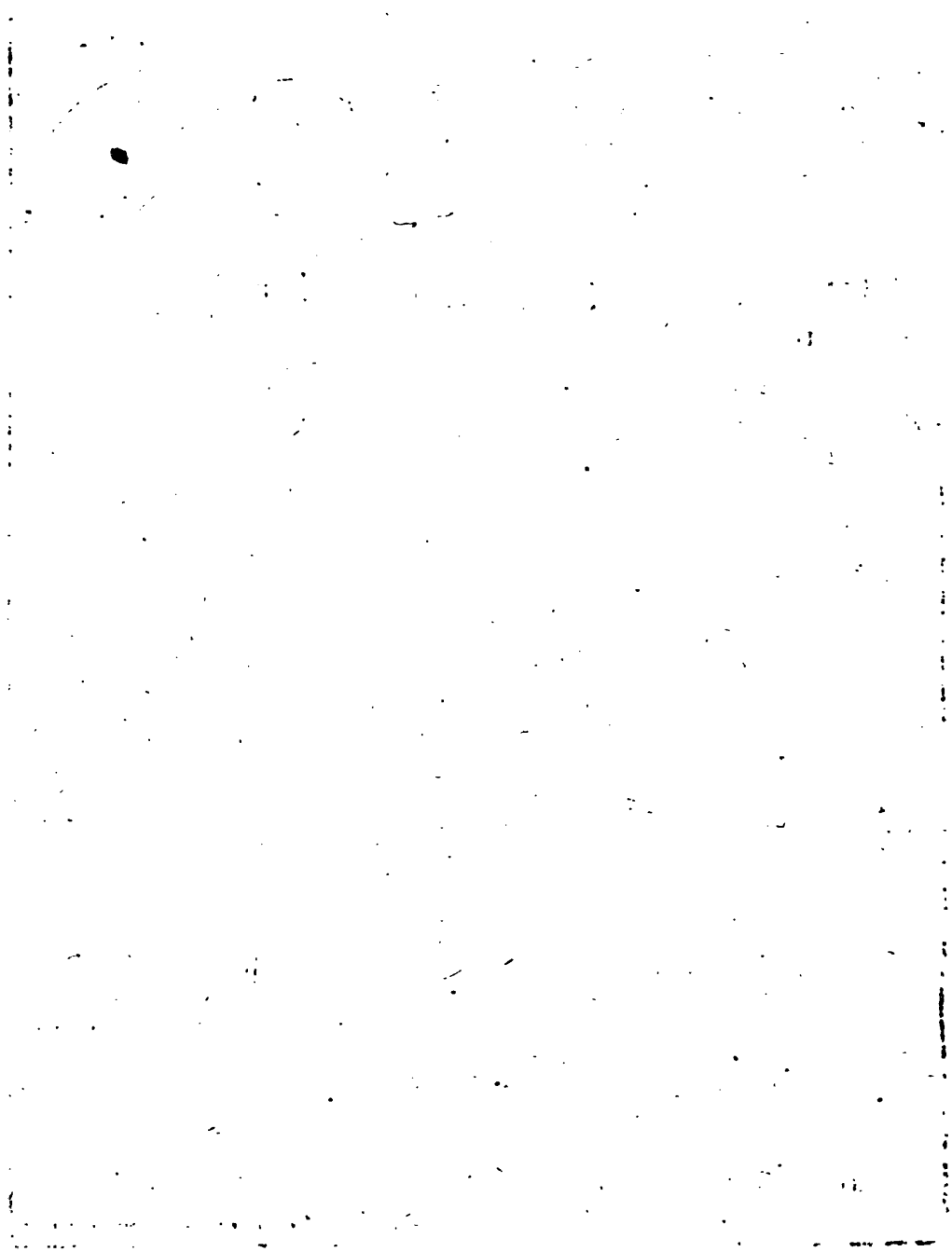
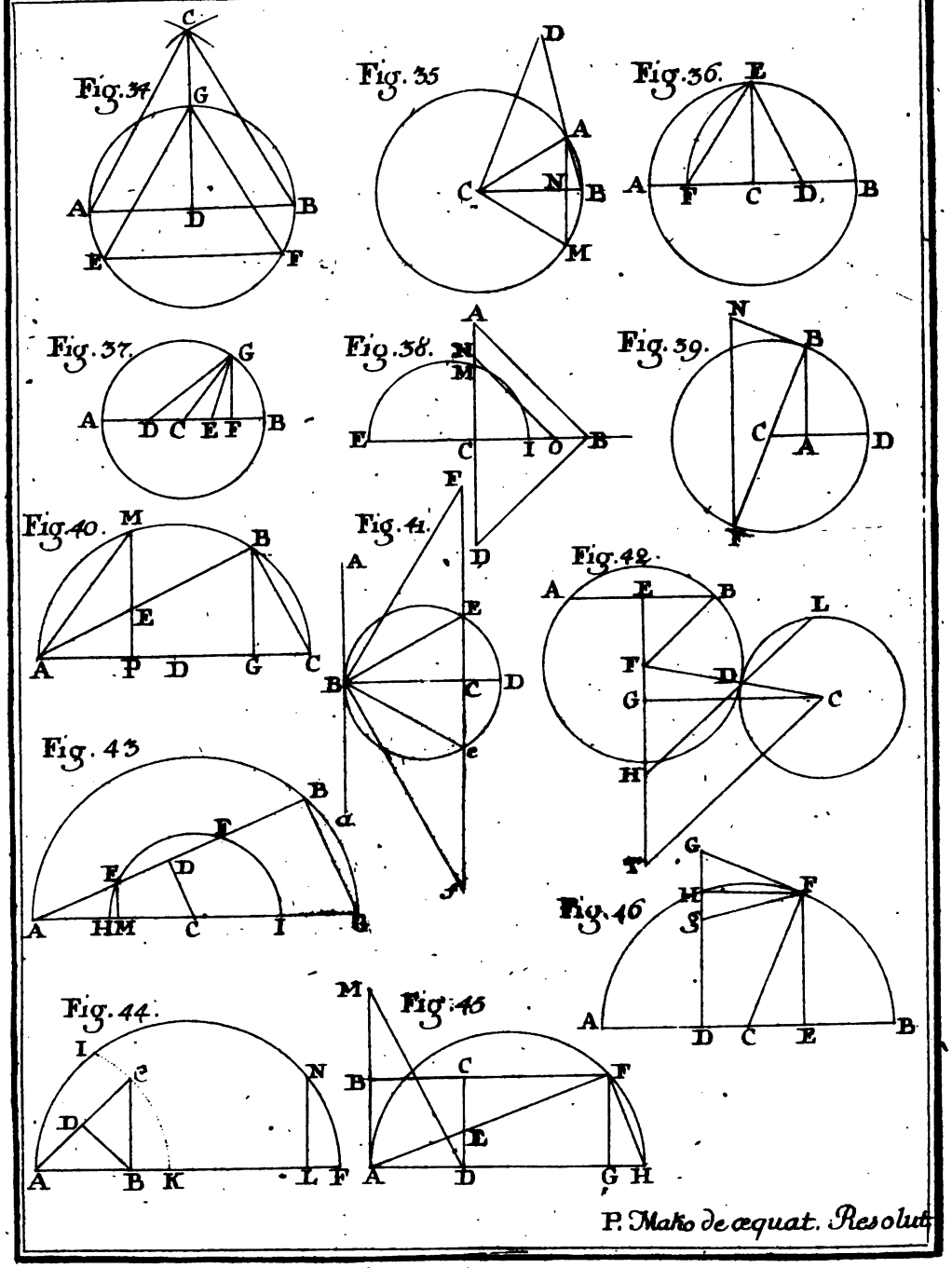


Fig. 33.

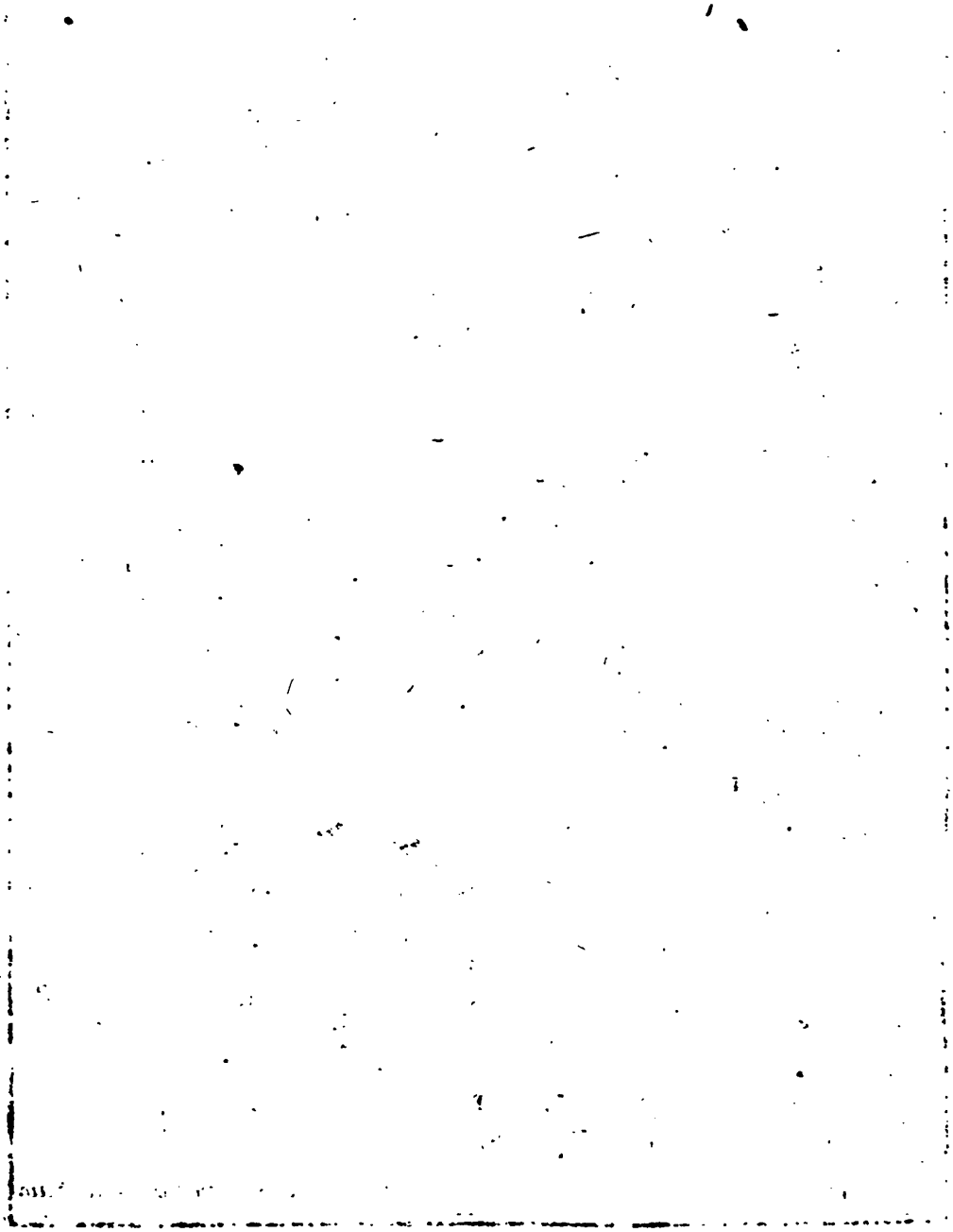


P. Mario. de aequat. Resolut.





P. Mako de æquat. Resolut.



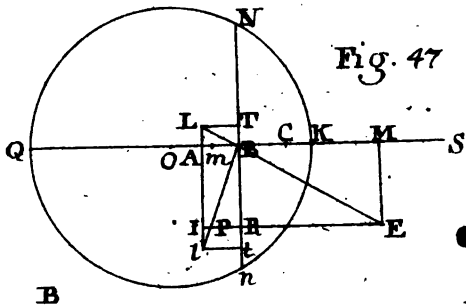


Fig. 47

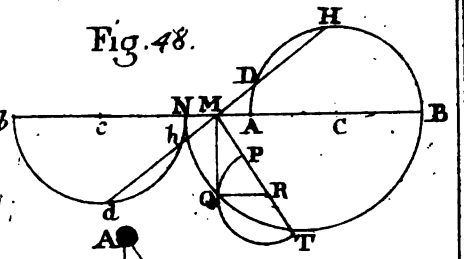


Fig. 48.

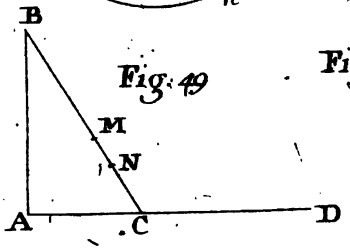


Fig. 49

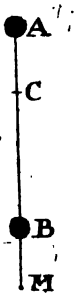


Fig. 50.

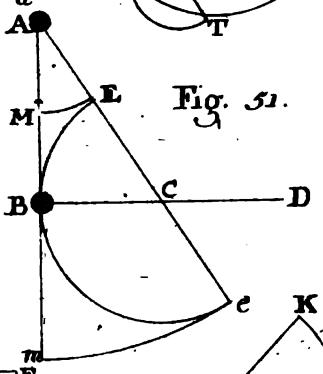


Fig. 51.

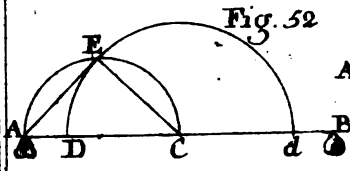


Fig. 52

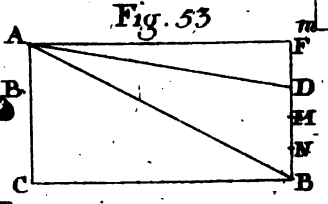


Fig. 53

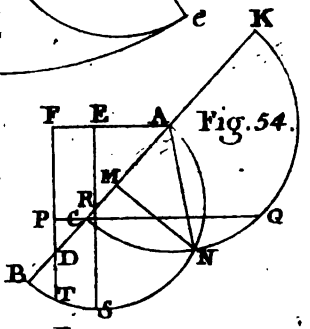


Fig. 54.

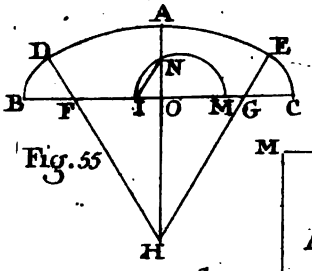


Fig. 55

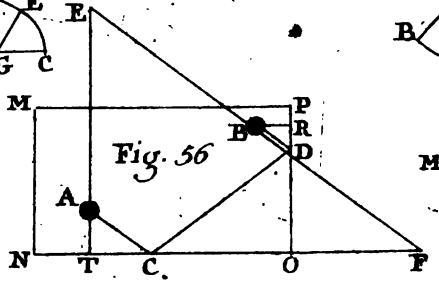


Fig. 56

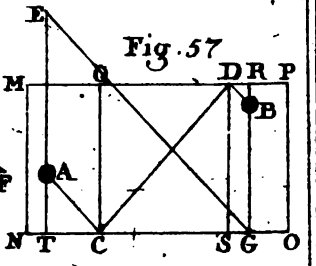


Fig. 57

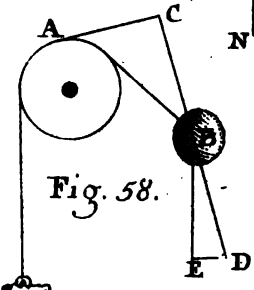


Fig. 58.

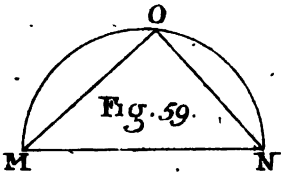


Fig. 59.

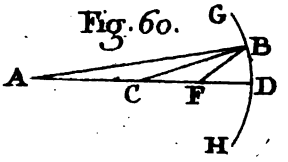


Fig. 60.

P. Mario de aequat. Resolut.

Fig. 61.

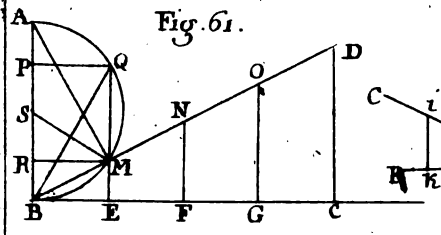


Fig. 62.

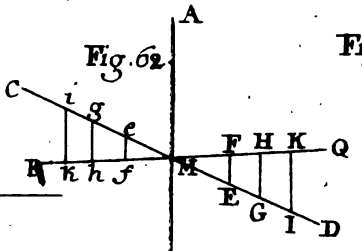


Fig. 63.

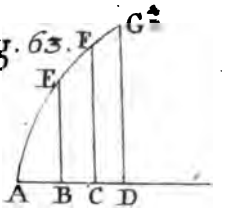


Fig. 64.

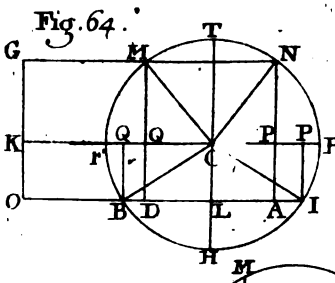


Fig. 65.

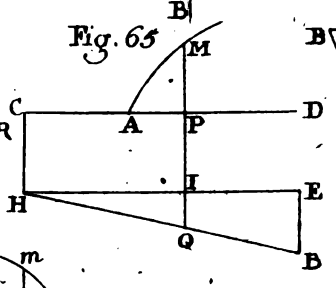


Fig. 66.

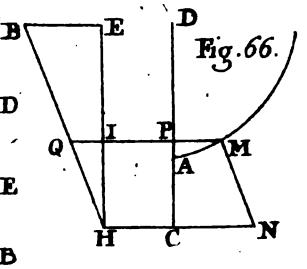


Fig. 67.

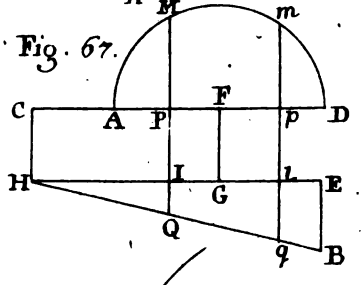


Fig. 68.

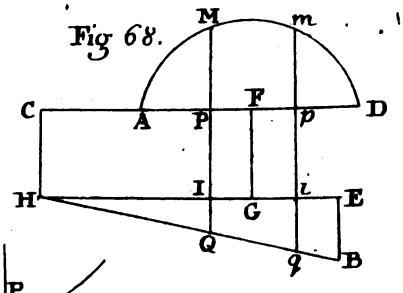


Fig. 69.

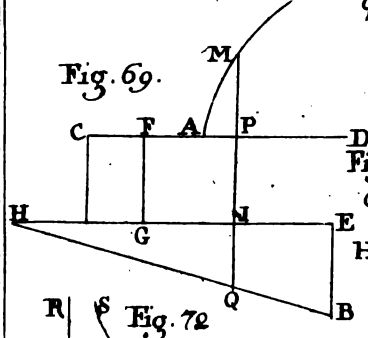


Fig. 70.

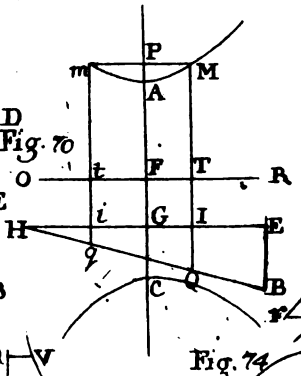


Fig. 71.

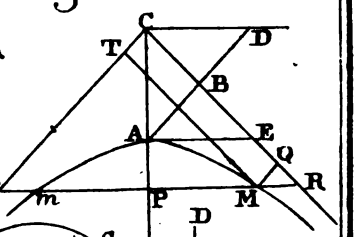


Fig. 72.

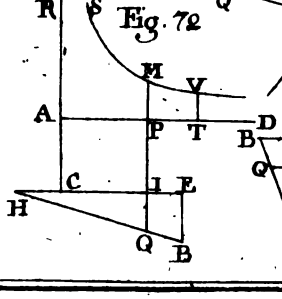


Fig. 73.

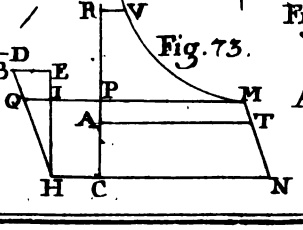


Fig. 74.

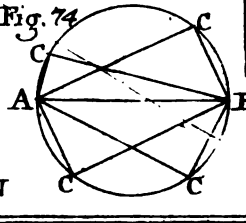
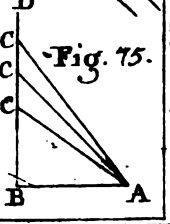
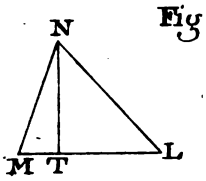


Fig. 75.



P. Mario de aequat. Resolut.

Fig. 76.



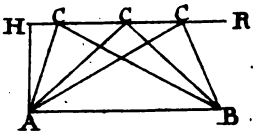


Fig. 77.

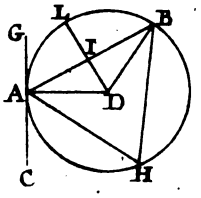


Fig. 78.

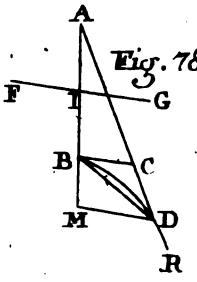


Fig. 79.

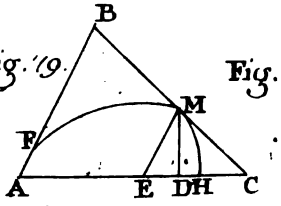
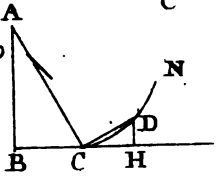


Fig. 80



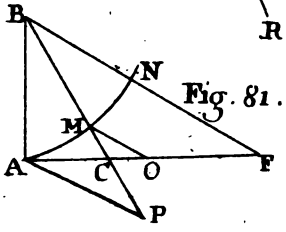


Fig. 81.

Fig. 82

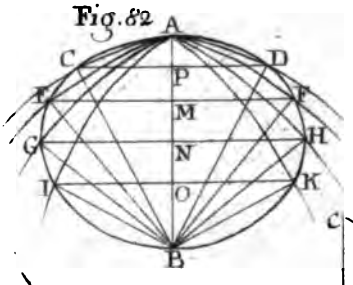
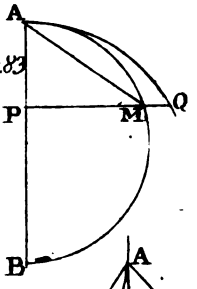


Fig. 83



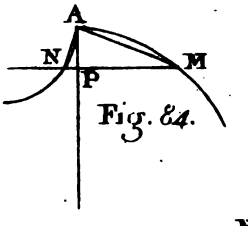
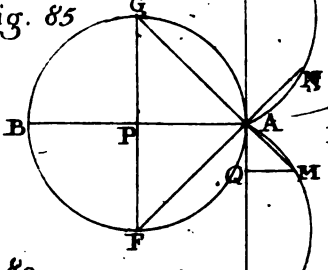


Fig. 84.

Fig. 85



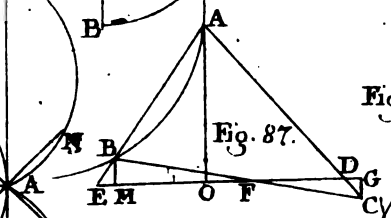


Fig. 87.

Fig. 86.

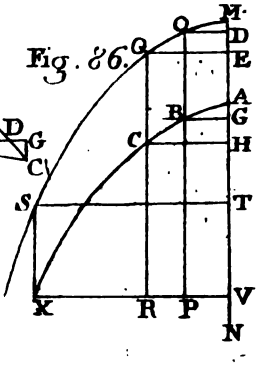


Fig. 88.

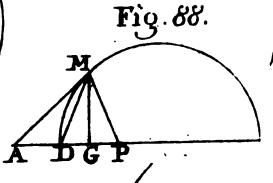
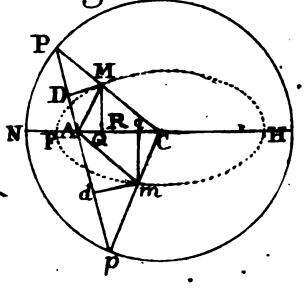


Fig. 89.



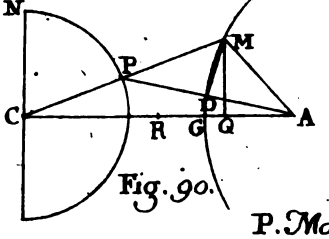


Fig. 90.

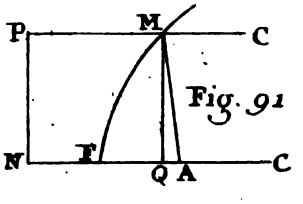


Fig. 91

P. Mako de aequat. Resolut.

Fig. 92

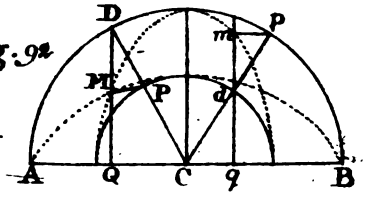


Fig. 93

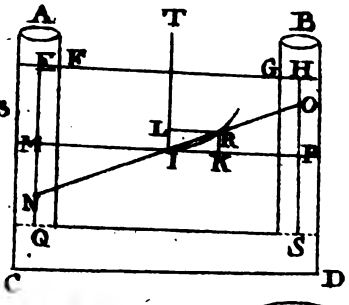


Fig. 94.

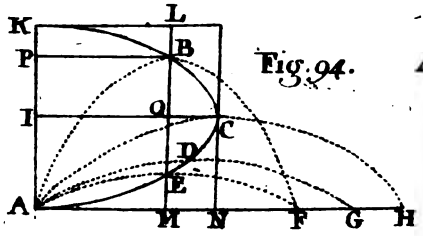


Fig. 95

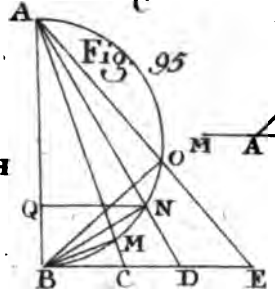


Fig. 96.

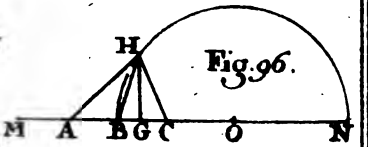


Fig. 97.

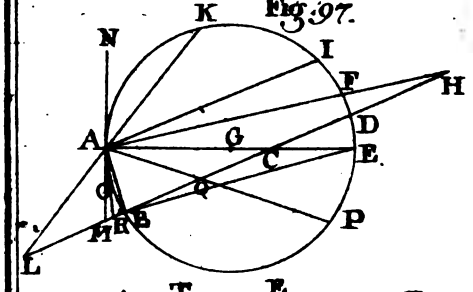


Fig. 98.

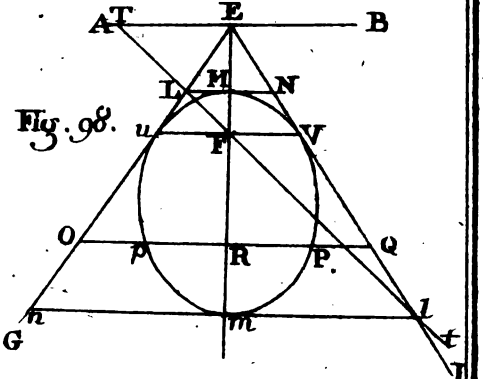


Fig. 99.

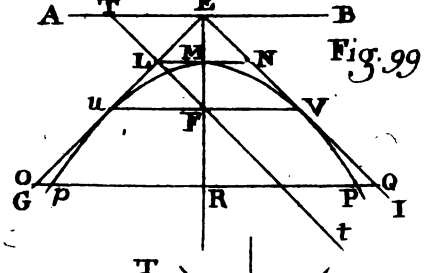


Fig. 100

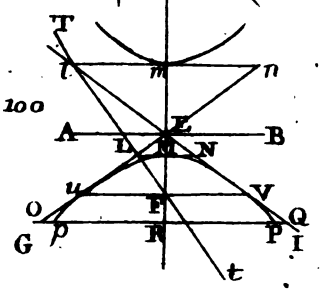
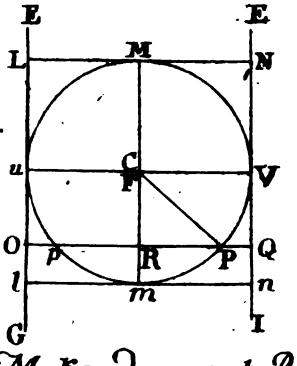


Fig. 101.



P. Mario de aequat. Resolut.

Fig. 102.

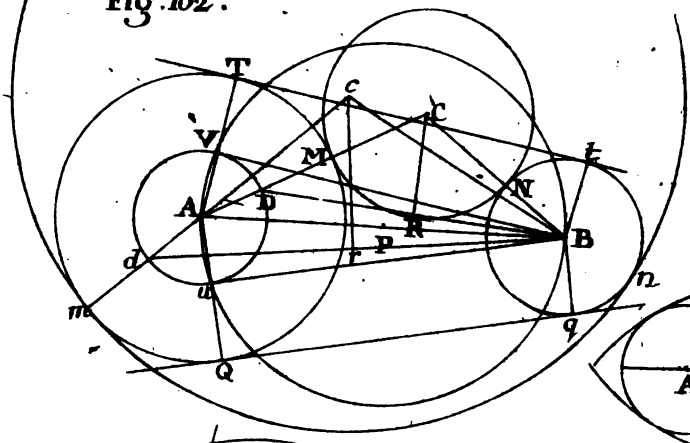


Fig. 105

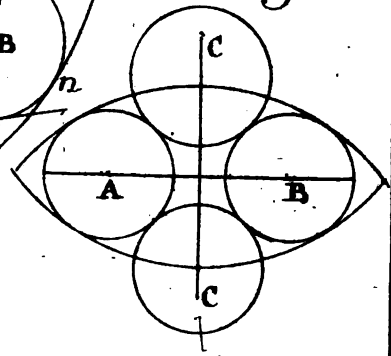


Fig. 103

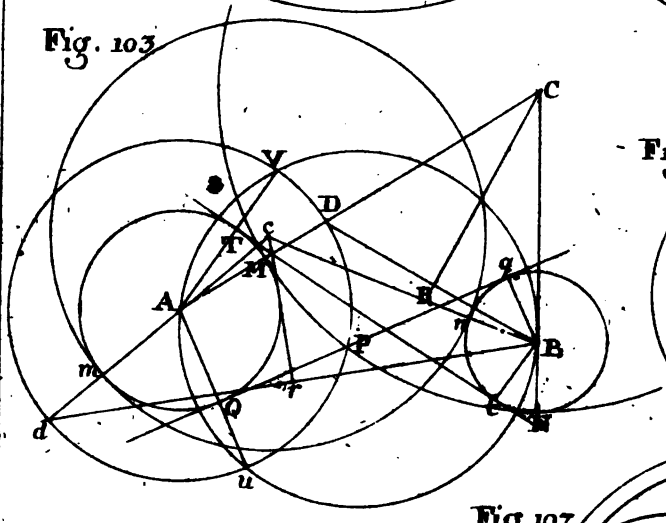


Fig. 106

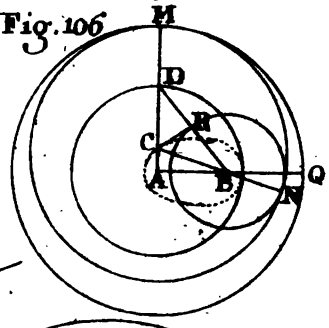


Fig. 104

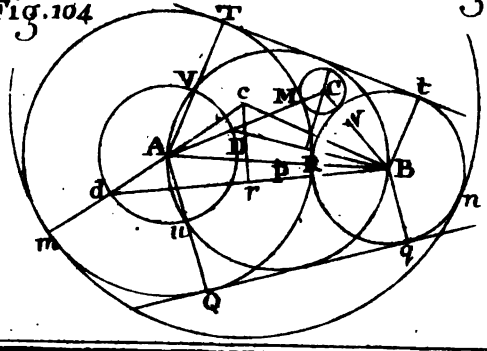
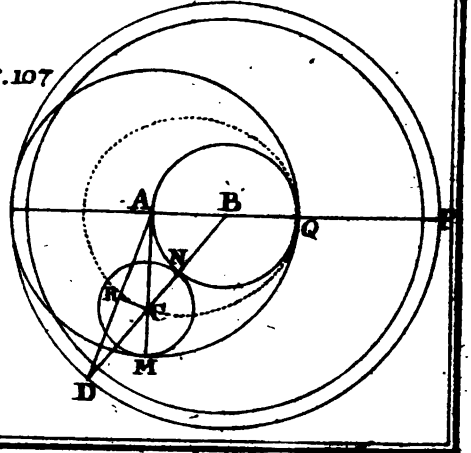


Fig. 107



P. Mako de aequat. resolut.

Fig. 108.

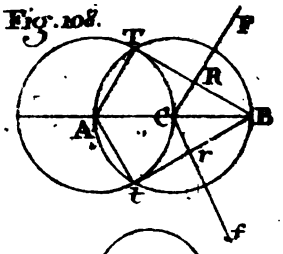


Fig. 109.

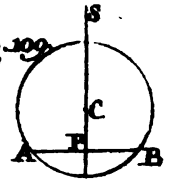
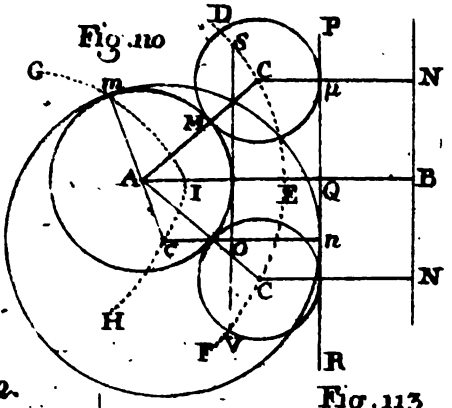


Fig. 110



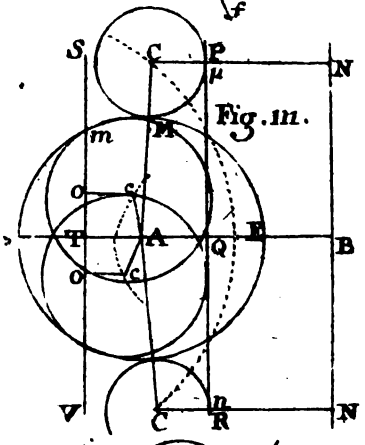


Fig. 112.

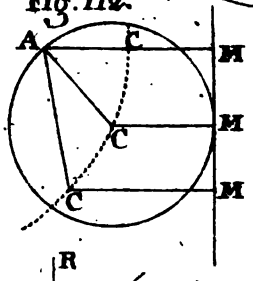


Fig. 113

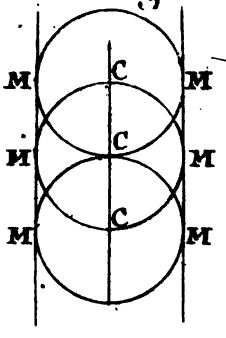


Fig. 114.

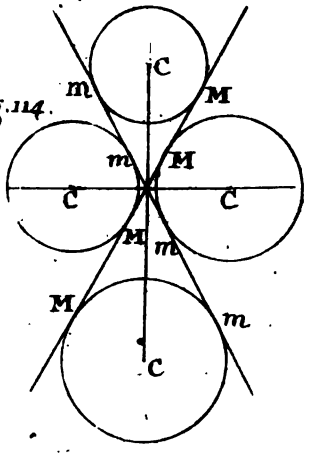
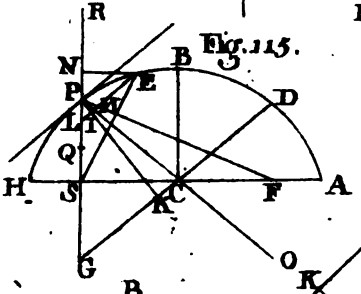


Fig. 115.



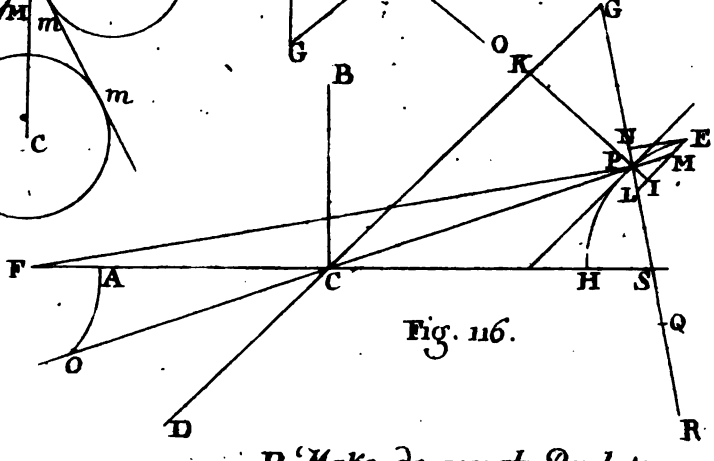


Fig. 116.

P. Mako de aequat. Resolut.

Fig. 117

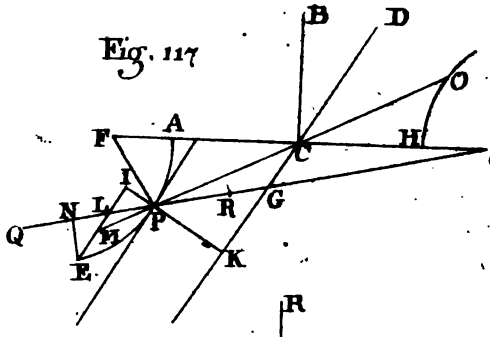


Fig. 118.

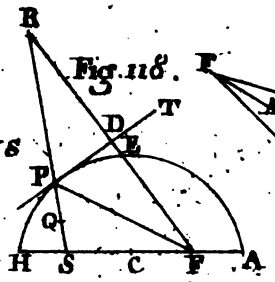


Fig. 119.

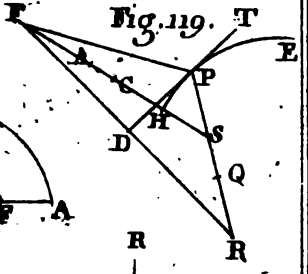


Fig. 120.

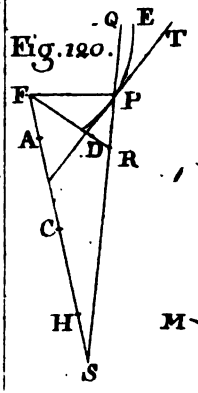


Fig. 121

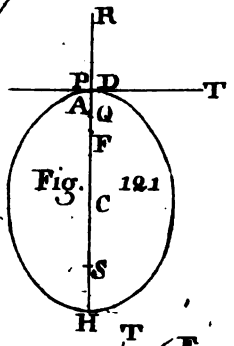


Fig. 122.

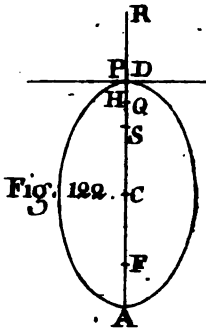


Fig. 123

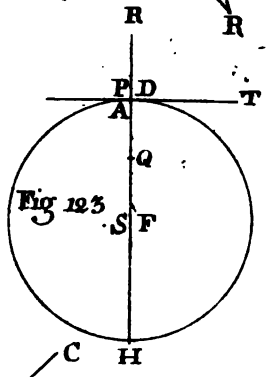


Fig. 124.

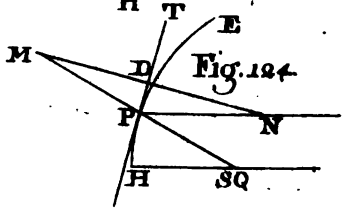


Fig. 125.

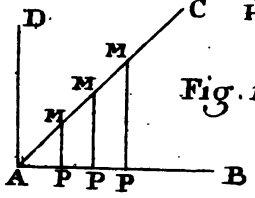


Fig. 126.

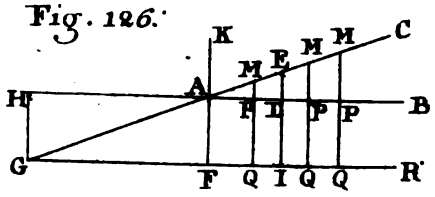


Fig. 127.

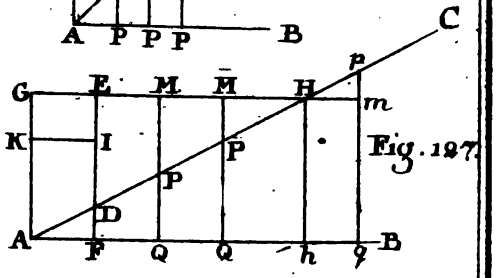


Fig. 128.

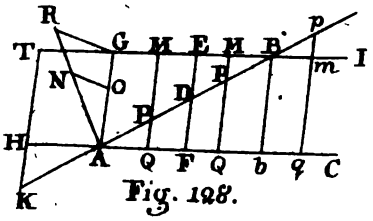
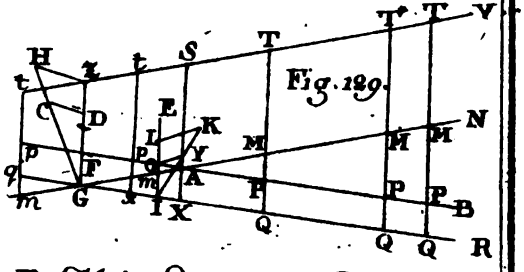


Fig. 129.



P. Mako. De aequat Resolut.

Fig. 130.

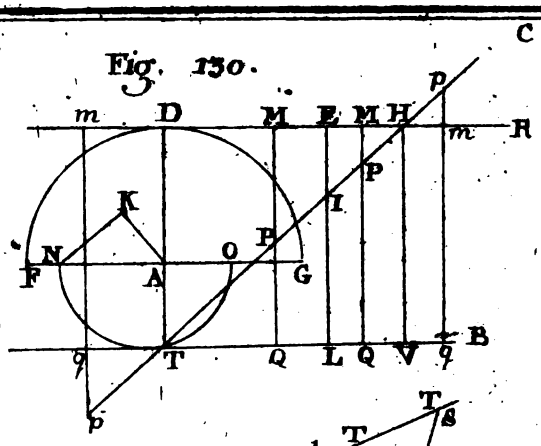


Fig. 132.

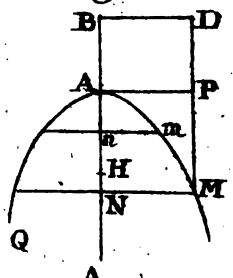


Fig. 131.

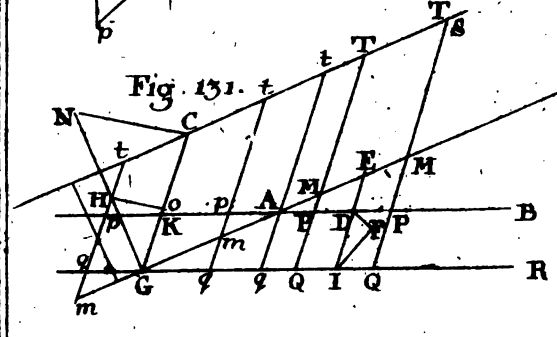


Fig. 133.

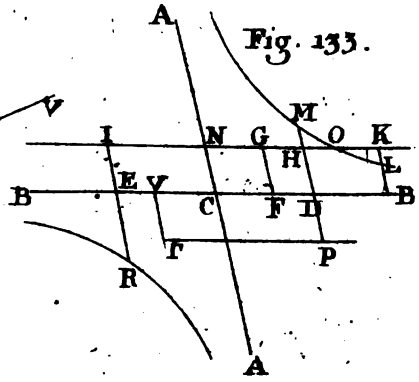


Fig. 134.

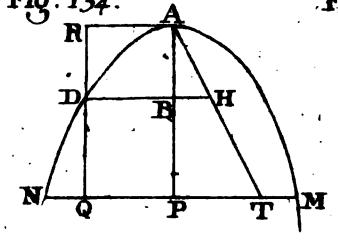


Fig. 135.

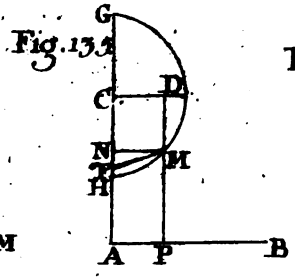


Fig. 136.

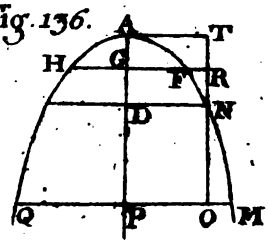


Fig. 137.

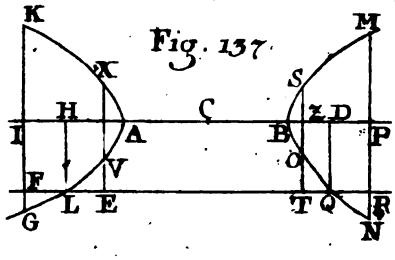


Fig. 138.

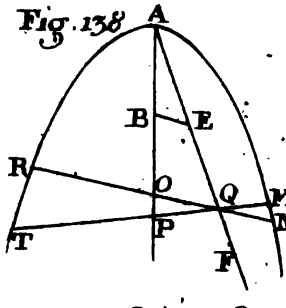
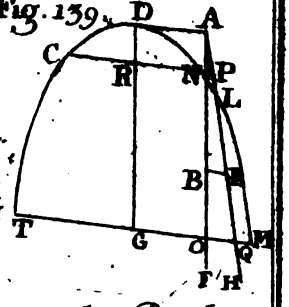


Fig. 139.



P. Mako de aequat. Resolut.

Fig. 140.

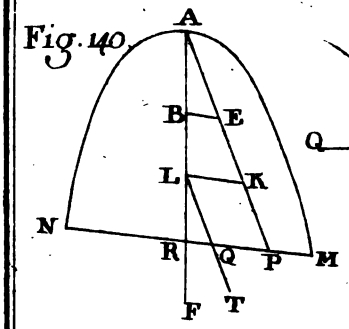
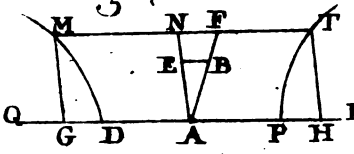


Fig. 141.



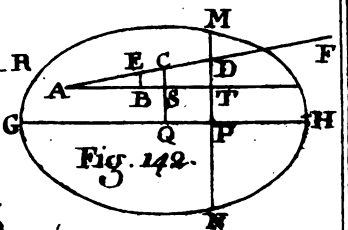


Fig. 142.

Fig. 143

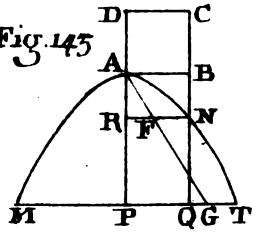


Fig. 144.

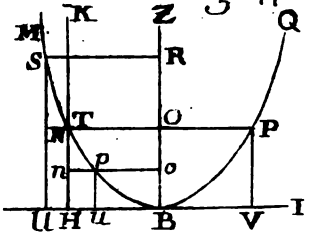


Fig. 145

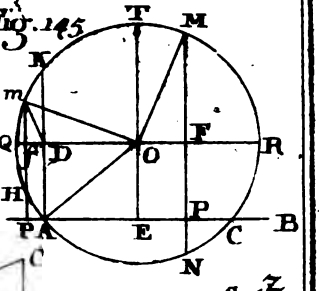


Fig. 146

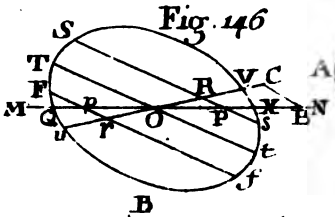


Fig. 147

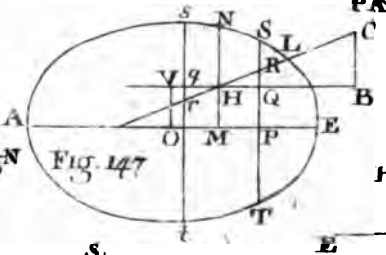


Fig. 148.

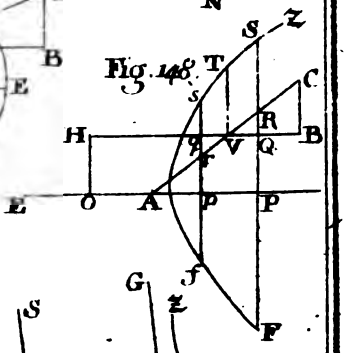


Fig. 149.

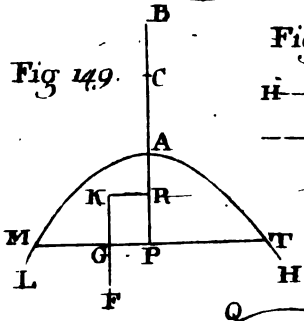


Fig. 150

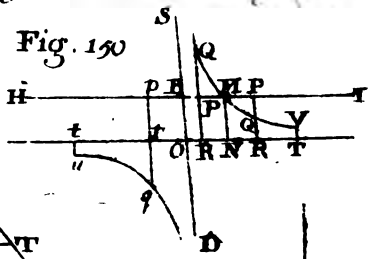


Fig. 151

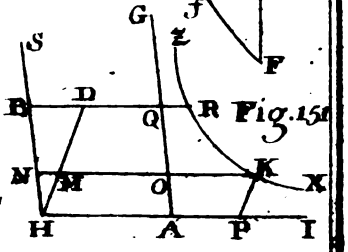


Fig. 152.

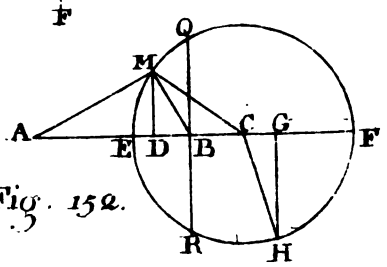
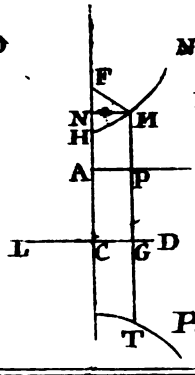


Fig. 153



P. Mario de aequat. Resol.

Fig. 154.

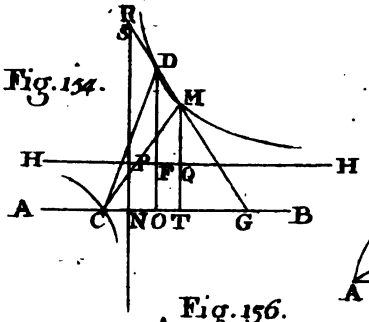
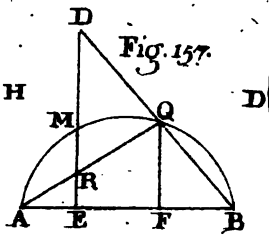


Fig. 157.



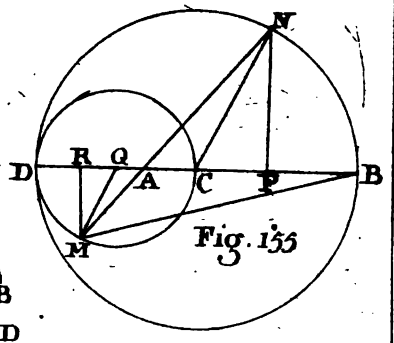


Fig. 155

Fig. 156.

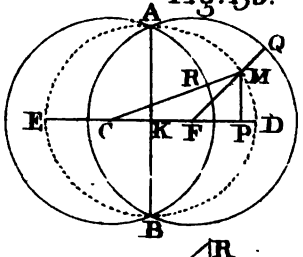


Fig. 158.

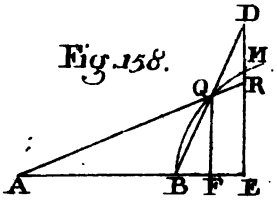


Fig. 159.

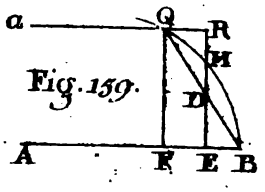


Fig. 160.

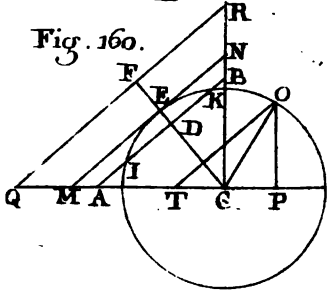


Fig. 161.

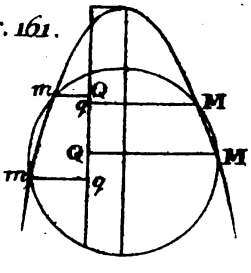


Fig. 162.

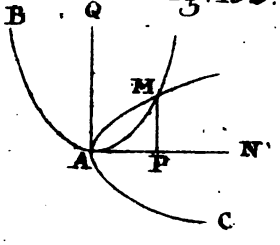
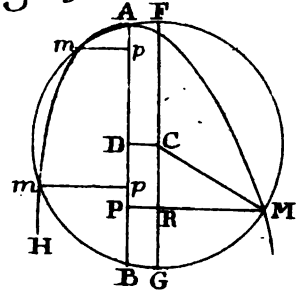


Fig. 163.



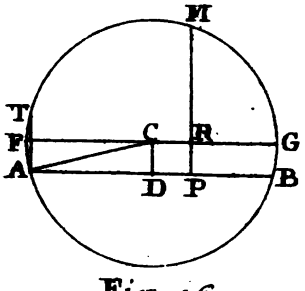
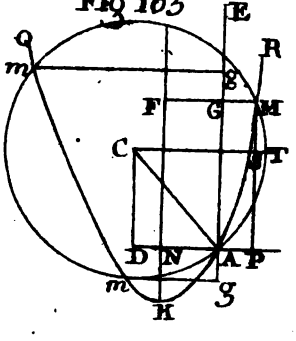


Fig. 164

Fig. 165



P. Mako de aequat Resolut

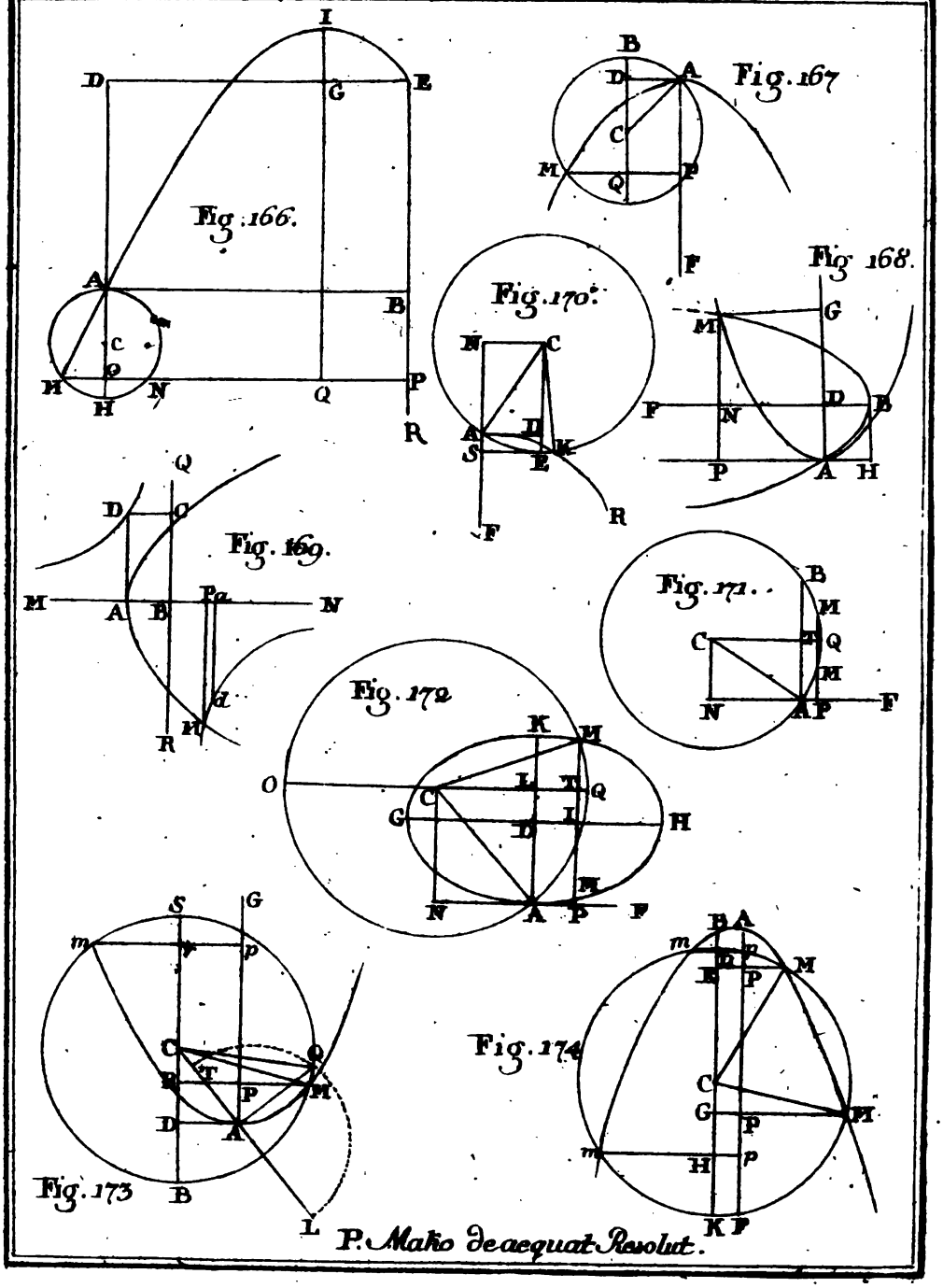


Fig. 166.
Fig. 167
Fig. 168.
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172
Fig. 173
Fig. 174
P. Mako de aequat. Resolut.